APELLIDO Y NOMBRE: .... LU N^o: ....

Por favor, resuelva los ejercicios en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido.

1. Enunciar y probar el teorema de Bayes. Dar un ejemplo de aplicación de dicho teorema.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con función de densidad dada por

$$f_X(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x) \quad \theta > 0$$

   a) Hallar $\hat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ.
   b) Hallar $\tilde{\theta}_n$ el estimador de momentos de θ.
   c) Decidir si $\hat{\theta}_n$ y $\tilde{\theta}_n$ son insesgados y calcular su ECM.
   d) Decidir si $\hat{\theta}_n$ y $\tilde{\theta}_n$ son consistentes.
   e) ¿Cuál de los dos estimadores prefiere usar con una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$? ¿Y con una de tamaño $n = 8$? Justificar.

3. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y μ y σ desconocidos. Hallar un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$.

Examen Final 28/09/2020
Probabilidad y Estadística (C)

① Para enunciar y probar el Teorema de Bayes es útil primero dar la definición de probabilidad condicional, partición y enunciar tanto la Regla del Producto como el Teorema de Probabilidad Total, que son sencillos de probar

→ Probabilidad Condicional Para 2 eventos $A, B \subseteq \Omega / P(B) > 0$...
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ probabilidad de A dado que ocurrió B.

→ Regla del Producto Dados $A, B \subseteq \Omega / P(B) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
Si además, $P(A) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

↳ Dem.: $P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ equivalente a $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
Si además $P(A) > 0 \Rightarrow$ De manera análoga: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$ □

→ Partición Se dice que $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ definen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ partición del espacio muestral Ω si se cumplen: ① $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ ② $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ③ $P(A_i) > 0 \ \forall i$

Hoja 1/4

→ Teorema de Probabilidad Total Dada $\{A_1, \ldots, A_n\}$ partición de Ω y $B \subseteq \Omega$ un suceso cualquiera $/ P(B) > 0 \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

A_i disjuntos ⇓ $B \cap A_i$ disjuntos

↳ Dem.: $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{\text{prop. asociativa}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i \Rightarrow P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right] =$
$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \underset{P(A_i) > 0 \Rightarrow \text{Regla del Producto}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Ahora sí: enuncio y demuestro el Teorema de Bayes :)

→ Teorema de Bayes Dada $\{A_1, \ldots, A_n\}$ partición de Ω y $B \subseteq \Omega / P(B) > 0$
$\Rightarrow P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$

→ Dem.: $P(A_j|B) \underset{P(B)>0}{=} \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \overset{P(A_j)>0 \Rightarrow \text{regla del producto}}{\underset{\text{teo. prob. total}}{=}} \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$

Una posible aplicación del Teo. de Bayes es resolver una situación como la planteada por este ejercicio:

Se estima que actualmente 140 de cada 4000 argentinxs está infectadx con COVID 19. Se sabe que la probabilidad de que un hisopado identifique correctamente a unx infectadx es del 0.99. y se ha determinado que la probabilidad de un falso positivo es de 0.0.05. ¿Cuál es la probabilidad de que alguien a quien el test le dio positivo esté infectadx?

Este ejercicio tendría por resolución...

$$\begin{cases} E = \text{"enfermo"} \\ E^c = \text{"sano"} \end{cases}$$

$$\begin{cases} + = \text{"test positivo} \\ - = \text{"test negativo"} \end{cases}$$

~~Datos~~ $P(E) = \frac{140}{4000}$, $P(+|E) = 0.99$, $P(+|E^c) = 0.05$

$$\Rightarrow P(E|+) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(+|E) \cdot P(E)}{P(+|E) \cdot P(E) + P(+|E^c) \cdot \underbrace{P(E^c)}_{1 - P(E)}}$$

VOID
VOID

(2) $X_1, \dots, X_n$ iid / $f_X(x) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$ con $\theta > 0$

a) Busco EMV de $\theta \Rightarrow$ Busco $\hat{\theta}$ que maximiza la función de verosimilitud $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$ $\forall x_1, \dots, x_n$ observaciones de $X_1 \dots X_n$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \Rightarrow L(\theta, \dots) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i & \text{si } 0 \leq x_i \leq \theta \ \forall \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod x_i & \text{si } \theta \geq \max\{x_1, \dots x_n\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Como $\left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod x_i > 0$ (*) función decreciente de $\theta \Rightarrow L$ alcanza máximo en el mínimo valor posible de θ.

(*) Para $x_i > 0 \ \forall i$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ EMV de θ

b) Busco EM de $\theta \Rightarrow$ Busco $\tilde{\theta}$ / $\frac{1}{n}\sum x_i = E(X)$ $\forall x_1, \dots, x_n$ observaciones

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)\,dx = \int_0^{\theta} \frac{2x^2}{\theta^2}\,dx = \frac{2}{3} \frac{x^3}{\theta^2}\Big|_0^{\theta} = \frac{2}{3}\theta$

$\Rightarrow \bar{X} = \frac{2}{3}\tilde{\theta}$ sii $\tilde{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$ EM de θ.

Hoja 2/4

c) Para $\hat{\theta}$ EMV...

Primero busco $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = P(X \leq t)$

↳ si $t \leq 0 \Rightarrow F_X(t) = 0$

↳ Si $0 \leq t \leq \theta$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_0^t \frac{2x}{\theta^2}\,dx = \frac{x^2}{\theta^2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{\theta^2}$

↳ Si $t \geq \theta$: $F_X(t) = 1$

$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^2}{\theta^2} & \text{si } 0 \leq t \leq \theta \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$

Ahora quiero $F_{\hat{\theta}}(t) = P(\hat{\theta} \leq t) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) \overset{\text{iid} \Rightarrow \text{independientes}}{=} P(X_1 \leq t) \dots P(X_n \leq t)$

$\Rightarrow F_{\hat{\theta}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n} & \text{si } 0 \leq t \leq \theta \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$

$\Rightarrow f_{\hat{\theta}}(t) = \frac{dF_{\hat{\theta}}}{dt}(t) = \frac{2n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n-1} I_{(0,\theta)}(t)$

donde la indicadora aparece ya que si $t < 0$ ó $t > \theta \Rightarrow F_{\hat{\theta}}(t) = \text{cte} \Rightarrow f_{\hat{\theta}}(t) = 0$

$\Rightarrow E(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\hat{\theta}}(t)\,dt = \int_0^{\theta} 2n \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}\,dt = \frac{2n}{2n+1} \frac{1}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n+1}\Big|_0^{\theta} = \frac{2n}{2n+1}\theta$

Como $E(\hat{\theta}) \neq \theta \Rightarrow \text{SESGO}(\hat{\theta}, \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta \neq 0 \Rightarrow \hat{\theta}$ no es asesgado

Pero como $E(\hat{\theta}) = \frac{2n}{2n+1}\theta \xrightarrow{n \to \infty} \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ es asintóticamente asesgado

$E(\hat{\theta}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{\hat{\theta}}(t)\,dt = \int_0^{\theta} 2n\theta \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n+1} dt = \frac{2n}{2n+2}\theta^2 \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n+2}\Big|_0^{\theta} = \frac{2n}{2n+2}\theta^2$

$$\Rightarrow V(\hat\theta) = E(\hat\theta^2) - E^2(\hat\theta) = \frac{2n}{2n+2}\theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\theta^2$$

$$\Rightarrow ECM(\hat\theta,\theta) = V(\hat\theta) + [SESGO(\hat\theta,\theta)]^2 = \frac{2n}{2n+2}\theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\theta^2 + \left[\frac{2n}{2n+1}\theta - \theta\right]^2 =$$

$$= \frac{2n}{2n+2}\theta^2 - 2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\theta^2 + \theta^2 = \frac{2n(2n+1)^2 - 4n(2n+2) + (2n+2)(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2 =$$

$$= \frac{(4n+1)(2n+1)^2 - 4n(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2 = \frac{(4n+1)(4n^2+4n+1) - 4n(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2 =$$

$$= \frac{16n^3 + 4n^2 + 16n^2 + 4n + 4n + 1 - 8n^2 - 8n}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2 = \frac{16n^3+12n^2+1}{(2n+2)(2n+1)^2}\theta^2 =$$

$$= \frac{16n^3+12n^2+1}{(2n+2)(4n^2+4n+1)}\theta^2 = \frac{16n^3+12n^2+1}{8n^3+8n^2+8n^2+8n+2n+1}\theta^2 = \frac{16n^3+12n^2+1}{8n^3+16n^2+10n+1}\theta^2$$

Acá algo salió mal.
En realidad,
$V \to 0$ y $SESGO \to 0$,
entonces $ECM \to 0$

Para $\tilde\theta = \frac{3}{2}\bar X$ EM de θ...

$$E(\tilde\theta) = E\left(\frac{3}{2}\bar X\right) = \frac{3}{2}E(\bar X) = \frac{3}{2}E(X) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\theta = \theta \Rightarrow \tilde\theta \text{ es asesgado}$$

$$V(\tilde\theta) = V\left(\frac{3}{2}\bar X\right) = \frac{9}{4}V(\bar X) = \frac{9}{4}\frac{1}{n}V(X)$$

$$\hookrightarrow E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{2x^3}{\theta^2}dx = \frac{2}{4}\frac{x^4}{\theta^2}\Big|_0^\theta = \frac{1}{2}\theta^2$$

$$\hookrightarrow V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{4}{9}\theta^2 = \frac{1}{18}\theta^2$$

$$\hookrightarrow V(\tilde\theta) = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{18}\theta^2 = \frac{\theta^2}{8n}$$

$$ECM(\tilde\theta,\theta) = V(\hat\theta) + [SESGO(\hat\theta,\theta)]^2 = \frac{\theta^2}{8n} + [\theta - \theta]^2 = \frac{\theta^2}{8n}$$

d) Para $\hat\theta = \max\{X_1,\dots,X_n\}$ EMV de θ...

sé que $\hat\theta$ consistente $\Leftrightarrow \hat\theta \xrightarrow{P} \theta \Leftrightarrow P(|\hat\theta - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Como $P(0 \le X_i \le \theta) = 1 \ \forall i \Rightarrow P(0 \le \hat\theta \le \theta) = 1 \ \forall i \Leftrightarrow P(0 \le \theta - \hat\theta \le \theta) = 1$

$\Rightarrow$ Si $\varepsilon > \theta \Rightarrow P(|\hat\theta - \theta| > \varepsilon) = P(\theta - \hat\theta > \varepsilon) = 0$

$0 < \theta - \varepsilon < \theta$

$\rightarrow$ Si $0 < \varepsilon < \theta \Rightarrow P(|\hat\theta - \theta| > \varepsilon) = P(\theta - \hat\theta > \varepsilon) = P(\hat\theta < \theta - \varepsilon) = F_{\hat\theta}(\theta - \varepsilon) = \left(\underbrace{\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}}_{<1}\right)^{2n} \to 0$

$\Rightarrow \hat\theta$ es consistente ☺

Para $\tilde\theta = \frac{3}{2}\bar X$ EMV de θ...

Por LGN: $\bar X \xrightarrow{P} E(X) = \frac{2}{3}\theta$.

$\Rightarrow$ Por propiedades de la convergencia en probabilidad

$$\frac{3}{2}\bar X = g(\bar X) \xrightarrow{P} g\left(\frac{2}{3}\theta\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\theta \Rightarrow \tilde\theta \text{ es consistente}$$

No es cierto :P

e) Como $\cancel{ECM(\hat\theta,\theta) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{16}{8}\theta^2 - 2\theta^2 \neq 0}$ mientras que $ECM(\tilde\theta,\theta) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ esperaría que con n grande sea mejor estimador $\tilde\theta$ EM. Pero para n pequeño puede tener menor costo computacional calcular $\max\{X_1,\dots,X_n\}$ (visible a ojo desnudo) que $\frac{3}{2}\bar X$ (requiere

~~cálculo)~~

De hecho... Podemos mirar con mayor precisión el ECM:

→ n=8

$$\left.\begin{aligned} &- V(\hat{\theta}) = \frac{2n}{2n+2}\theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1}\right)\theta^2 = \left[\frac{16}{18} - \left(\frac{16}{17}\right)^2\right]\theta^2 = \frac{8}{2601}\theta^2 \\ &- SESGO^2(\hat{\theta},\theta) = \left(\frac{2n}{2n+1} - 1\right)^2\theta^2 = \left(\frac{16}{17} - 1\right)^2\theta^2 = \frac{1}{289}\theta^2 \end{aligned}\right\} ECM(\hat{\theta},\theta) = \frac{1}{153}\theta^2$$

$$- ECM(\tilde{\theta},\theta) = \frac{\theta^2}{8n} = \frac{1}{64}\theta^2 \Rightarrow ECM(\hat{\theta},\theta) < ECM(\tilde{\theta},\theta)$$

Resulta no sólo más fácil de calcular sino que también esperamos que sea más preciso.

→ n=100

$$\left.\begin{aligned} &- V(\hat{\theta}) = \left[\frac{200}{202} - \left(\frac{200}{201}\right)^2\right]\theta^2 \cong 2.45 \cdot 10^{-5}\theta^2 \\ &- SESGO^2(\hat{\theta},\theta) = \left(\frac{200}{201} - 1\right)^2\theta^2 = \frac{1}{40401} \end{aligned}\right\} ECM(\hat{\theta},\theta) \cong 4.93 \cdot 10^{-5}\theta^2$$

$$- ECM(\tilde{\theta},\theta) = \frac{\theta^2}{8n} = \frac{1}{1600}\theta^2 \simeq 6.25 \cdot 10^{-4}\theta^2 \Rightarrow ECM(\hat{\theta},\theta) < ECM(\tilde{\theta},\theta)$$

~~Sorprendentemente 100 aún es poco para que $\hat{\theta}$ se vuelva más preciso. Pero la diferencia de errores cuadráticos medios es muy pequeña.~~

~~Hilando fino~~, tanto para n=8 como para n=100 me conviene usar $\hat{\theta} = máx\{X_1, \ldots, X_n\}$. ~~Pero para tamaños muestrales más grandes va a ser más conveniente usar $\tilde{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$.~~

Hoja 3/4

③ $X_1, \dots, X_n$ iid / $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ, σ desconocidos

Quiero intervalo de confianza $[a,b]$ de nivel exacto $1-\alpha$.
Es decir, busco a,b / $P(a \leq \mu \leq b) = 1-\alpha$.

Sé que $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\Sigma(X_i - \bar{X})^2 / [n(n-1)]}} \sim t_{n-1} \Rightarrow$ Voy a usar esta variable aleatoria como pivot ya que sé que tiene distribución T de Student con $n-1$ grados de libertad cuya función de probabilidad acumulada $F_T(t) = P(T \leq t)$ es conocida; de modo que sus percentiles $t_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$ están tabulados.

Siendo $f_T(t) = f_T(-t)$ por t_{n-1} distribución simétrica, parto de...

$P(|T| \leq t_{\alpha/2}) = P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = F(t_{\alpha/2}) - F(-t_{\alpha/2}) = 2F(t_{\alpha/2}) - 1 =$
$= 2F[F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})] - 1 = 2(1-\frac{\alpha}{2}) - 1 = 1-\alpha$

Entonces $P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1-\alpha$. Además...

$P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = P\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n}}\, t_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{S^2}{n}}\, t_{\alpha/2}\right)$

$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n}}\, t_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{S^2}{n}}\, t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

$\Rightarrow IC_1 = [a,b] = \left[\bar{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n}}\, t_{\alpha/2},\ \bar{X} + \sqrt{\frac{S^2}{n}}\, t_{\alpha/2}\right]$ con t_β percentil de t_{n-1}

Hoja 4/4

NOTA