1	2	3	4	Nota

8

Probabilidad y Estadística (C)

Recuperatorio del Primer Parcial - 11/07/2013

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen. Antes de retirarse debe firmar una hoja de asistencia.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA N°:

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario tener dos ejercicios completos bien y reunir 60 puntos.

En los ejercicios donde corresponda, defina con palabras las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

Realizar cada ejercicio en hoja separada. *Enumerar todas las hojas y colocar el número total de hojas entregadas, además escribir el apellido en cada una.*

En todos los casos donde sea posible defina claramente las variables aleatorias involucradas, las distribuciones y parámetros de las mismas. Esto también será evaluado.

1. Un comerciante vende cajas de 10 cd (compact disk). Si alguno está fallado, acepta la devolución de la caja la misma semana de la compra. Si hay dos o más fallados, además de aceptar la devolución, el comerciante regala una lapicera. Cada cd tiene probabilidad 0.006 de venir fallado y las fallas producidas en un cd son independientes de las fallas producidas en cualquier otro.

a) José compra una caja de cd, ¿qué probabilidad tiene que devolver la caja? ¿Y de llevarse una lapicera?

b) Una clienta compra una caja de cd por semana ¿Cuál es la probabilidad de que durante el segundo mes deba ir por primera vez a devolver la caja? (considerar meses de cuatro semanas).

c) Una clienta compra una caja de cd por semana. Si en la tercera semana devuelve una caja por primera vez, ¿cuál es la probabilidad de que la cuarta caja devuelta sea en la novena semana?

2. En un banco hay dos cajas habilitadas para cobrar a los clientes. En la caja A el tiempo en minutos que espera un cliente para ser atendido es una variable aleatoria exponencial con media 4 minutos.

a) Un cliente en la caja A ya esperó más de 2 minutos en la cola para que lo atiendan ¿Cuál es la probabilidad de que deba esperar más de 5 minutos para ser atendido?

b) El gerente del banco habilitó una segunda caja B. En ella el tiempo de espera también es una variable exponencial, con media 7 minutos. Luis llegó al banco y eligió al azar y con igual probabilidad una de las dos cajas para ser atendido. Si ha tenido que esperar menos de 3 minutos para que le cobren, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido atendido en la caja B?

P c) Sea X la variable tiempo de espera en la caja A. Hallar la función de densidad de la variable $Z = \dfrac{1}{1+X}$.

3. Suponga que el número de roturas que produce un telar sigue un proceso de Poisson con parámetro 0.1 roturas por hora. Se está produciendo un estilo particular de tela que requiere 30 horas de trabajo. Si el telar produce cuatro o más roturas la tela no resulta de calidad satisfactoria.

a) Se fabrica una de estas telas que requiere 30 horas de trabajo y no resulta de calidad satisfactoria, ¿cuál es la probabilidad de que durante el proceso de producción de la misma el telar haya producido más de cinco roturas?

b) Si se producen 5 de estas telas en forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 resulten de calidad satisfactoria?

c) ¿Cuál es el número esperado de roturas en una de estas telas durante un período de 20 horas (las 10 primeras y las 10 últimas horas de fabricación)? ¿Cuál es su varianza?

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Y tiene distribución normal estándar y la densidad de X está dada por la función:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Obtener la función de densidad conjunta $f_{(X,Y)}$ y las densidades marginales $f_{X|Y}$ y $f_{Y|X}$.

b) Calcular la probabilidad del evento $\{X^2 < Y < 1\}$.

c) Sea F_Z la función de distribución acumulada de $Z = X + Y$. Calcular $F(\sqrt{2})$.

8 1

3.

X_t: # roturas en t hs

$X_t \sim \mathcal{P}(0.1 * t)$

$X_{30} \sim \mathcal{P}(3)$

a) $P(X_{30} > 5) = 1 - F_{X_{30}}(5)$

$= 1 - 0.9161 = 0.0839$

b) O: # telas con calidad satisfactoria de 5 realizadas

$P(X_{30} < 4) = F_{X_{30}}(3) = 0.6472$

$O \sim Bi(5, 0.6472)$

$P(O > 2) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} (0.6472)^i (0.3528)^{5-i}$

c) $X_{20} \sim \mathcal{P}(2)$

$E(X_{20}) = 2 \quad Var(X_{20}) = 20$

2.

~~X_A: tiempo que espera el cliente en la caja A~~

~~X_B: " " " " " " " B~~

~~$X_A \sim \mathcal{E}($~~

X_i: tiempo en min de espera para ser atendido en la caja i, $i = A, B$

$X_A \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad X_B \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{7}\right)$

a) $P(X_A > 5 \mid X_A > 2) \overset{\text{FALTA DE MEMORIA DE } \mathcal{E}\left(\frac{1}{4}\right)}{=} P(X_A > 3)$

$= e^{-\frac{3}{4}}$

b) A: Elige la caja A

T: tiempo de espera en min

$$P(A^c \mid T < 3) = \frac{P(T < 3 \mid A^c)\, P(A^c)}{P(T > 3)}$$

$$= \frac{P(X_B < 3)\, \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(P(X_B < 3) + P(X_A < 3)\right)}$$

8 2

$$= \frac{1-e^{-\frac{3}{4}}}{1-e^{-\frac{3}{7}}+1-e^{-\frac{3}{4}}} = 0.6022$$

c)

1.

X: # cds fallados de un total de 10

$X \sim Bi(10, 0.006)$ P(

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \binom{10}{0}(0.994)^{10} = 0.05840$

$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{10}{i} 0.006^i \, 0.994^{10-i}$

$= 1 - 0.994^{10} - 10 * 0.006 * 0.994^9$

$= 0.001569$

b) Y: # semanas hasta tener que devolver la caja de cds

$Y \sim Ge(0.05840)$

$P(5 \leq Y \leq 8) = F_Y(8) - F_Y(4)$

$= \cancel{1} - 0.9416^8 \cancel{-1} + 0.9416^4$

$= 0.1682$

c) $\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{1}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{4}$

$\text{SEMANAS } 1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9}_{\text{3 devoluciones en 6 semanas}}$

⑧ 3

W: # semanas hasta realizar 3 devoluciones

$$W \sim BN(3, 0.05840)$$

$$P_W(6) = \binom{5}{2} 0.05840^3 \, 0.9416^2$$