

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Final

Demuestre los resultados teóricos que utiliza en cada ejercicio. Justifique todas sus respuestas

1. (2,5 pto) Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables iid. con función de densidad:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

- (a) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ , llamarlo $\hat{\theta}$.
(b) Determinar si $\hat{\theta}$ es insesgado.
(c) Determinar si $\hat{\theta}$ es consistente.
2. (2,5 pto) Sea X una variable aleatoria con distribución $E(\lambda)$.
- (a) Calcular su función de distribución acumulada, su función generadora de momentos (indicar su dominio), su esperanza y su varianza.
(b) ¿Es cierto que $P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$ para todo $t > 0$? Justificar.
(c) Probar que si Y tiene función de distribución acumulada F y F es continua y estrictamente creciente, entonces

$$W = -\ln(F(Y))$$

tiene distribución exponencial. ¿De qué parámetro?

3. (2,5 pto) Se tiene una caja con 7 bolitas rojas y 8 azules. Una persona que desconoce el contenido de la caja, desea saber si la proporción de bolitas rojas es menor a la de azules, pero solo le está permitido sacar de una bolita una vez, y para sacar la siguiente bolita debe primero devolver la que sacó. Para lograr su cometido realiza un test de nivel aproximado 0.05 (basado en $X_n =$ cantidad de bolitas rojas extraídas en n extracciones.) para

$$H_0 : p = 1 \quad vs. \quad H_1 : p < 1$$

donde p es la proporción de bolitas rojas, X_n/n .

Determinar la región de rechazo de dicho test.

Si repite 100 veces el experimento descrito, hallar la probabilidad de que rechace la hipótesis nula. ¿Es deseable que esta probabilidad sea baja o alta? Justificar.

4. (2,5 pto) Al envasar un producto, el peso en gramos de cada bolsa obedece una distribución uniforme $U(900, 1100)$. Estimar $P(|X - 1000| > 1)$, donde X es el peso promedio de 10,000 bolsas.