Álgebra I

1er. cuatrimestre 2021

Segundo Recuperatorio del Primer Parcial - 23/07/2021

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

En la primera hoja coloque su nombre completo, número de libreta, carrera y ***turno*** *de práctica al que está incriptx en el SIU Guaraní.*

Ejercicio 1:
Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A\}$ el conjunto de **todas las funciones** de A en A. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1) + f(2) \leq g(1) + g(2).$$

(a) Determinar si la relación $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

(b) Sea $\mathrm{Id} : A \to A$ la función identidad en $\mathcal{F}$.
Calcular el cardinal del conjunto $\{f \in \mathcal{F} : f \,\mathcal{R}\, \mathrm{Id}\}$.

Ejercicio 2:
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ vale que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{n+1}.$$

Ejercicio 3:

(a) Calcular $r_{16}(9^n)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, probar que

$$16 \mid 37 \cdot 9^n + 4n^2 + 12n - 21 \iff n \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{ó} \quad n \equiv 3 \pmod 4.$$

Ejercicio 4:
Determinar **todos** los $m \in \mathbb{N}$ tales que $(m : 240) = 40$ y m tiene exactamente 16 divisores positivos.

Recuperatorio 1er Parcial - 23/7/21

Ejercicio 1:

Dado $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A\}$ el conjunto de todas las funciones de A en A.

Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1)+f(2) \leq g(1)+g(2)$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es (R), (S), (AS) y/o (T)

(b) Calcular el cardinal del conjunto

$$\{f \in \mathcal{F} : f \,\mathcal{R}\, Id\}$$

(a)

(R) $\mathcal{R}$ es reflexiva $\iff f \,\mathcal{R}\, f, \ \forall f \in \mathcal{F}$

$\iff f(1)+f(2) \leq f(1)+f(2), \ \forall f \in \mathcal{F}$

y esto se cumple obviamente, $\forall f \in \mathcal{F}$

(S) $\mathcal{R}$ es simétrica $\iff \forall f, g \in \mathcal{F}, \ f \,\mathcal{R}\, g \Rightarrow g \,\mathcal{R}\, f$

o sea $\iff \forall f, g \in \mathcal{F}$,

si $f(1)+f(2) \leq g(1)+g(2)$, entonces

se cumple también $g(1)+g(2) \leq f(1)+f(2)$

Y ésto suena más bien a que no se va a cumplir, dado que hay un $\leq$. Alcanza con producir un contraejemplo, es decir una función $f \in \mathcal{F}$, y una función $g \in \mathcal{F}$, lo más sencillas posibles, tales que

$$f(1)+f(2) \leq g(1)+g(2) \quad \text{pero} \quad g(1)+g(2) \not\leq f(1)+f(2)$$

Por ejemplo sea f la función $f(n)=1$ para $1 \leq n \leq 7$ (¿es función, no?), y sea g la función $g(n)=2$, $1 \leq n \leq 7$

Entonces $f(1)+f(2) = 2 \leq 4 = g(1)+g(2)$

pero $g(1)+g(2) = 4 \not\leq 2 = f(1)+f(2)$.

¡Ojo que hay que definir las funciones f y g en todo el dominio, no solo en los valores 1 y 2!

(Pero no lo penalizamos mucho...)

AS $\mathcal{R}$ es antisimétrica $\Longleftrightarrow$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \mathcal{R} g \text{ y } g \mathcal{R} f \Rightarrow f = g$$

o sea, $\forall f, g \in \mathcal{F}$, si $f(1)+f(2) \leq g(1)+g(2)$ y $g(1)+g(2) \leq f(1)+f(2)$, ent. $f = g$ como <u>funciones</u>

Pero $f(1)+f(2) \leq g(1)+g(2)$ y $g(1)+g(2) \leq f(1)+f(2)$

$\Longleftrightarrow$ $f(1)+f(2) = g(1)+g(2)$.

¿Será cierto que si $f(1)+f(2) = g(1)+g(2)$, entonces $f = g$ como funciones?

Ya os parecerá que no ... y existe multitud de contraejemplos.. f y g ni siquiera tienen que diferir en sus valores en 1 y 2 pues hay libertad con los valores 3 a 7.

Por ejemplo (piense otros ...)

f definida por $f(n) = 1,\ 1 \le n \le 7$

g definida por $g(n) = 1,\ 1 \le n \le 6$, y $g(7) = 2$

Entonces $f(1) + f(2) = 2 = g(1) + g(2)$ pero $f \neq g$ ∇ !

(T) $\mathcal{R}$ es transitiva $\Leftrightarrow$ $\forall f, g, h \in \mathcal{F}_i$,

$$f \mathcal{R} g \text{ y } g \mathcal{R} h \Rightarrow f \mathcal{R} h$$

o sea, si $\forall f, g, h \in \mathcal{F}_i$ tales que

$f(1) + f(2) \le g(1) + g(2)$ y $g(1) + g(2) \le h(1) + h(2)$

se puede deducir que $f(1) + f(2) \le h(1) + h(2)$

lo cual es cierto por cadena de desigualdades, así que $\mathcal{R}$ es transitiva $\boxtimes$

(b) $f \mathcal{R} Id \Leftrightarrow f(1) + f(2) \le 1 + 2 = 3$

Pero como $f : \{1, \dots, 7\} \to \{1, \dots, 7\}$,

$f(1) + f(2) \ge 1 + 1 = 2$

Con lo cual $f(1) + f(2) = 2$ ó $f(1) + f(2) = 3$

¡Ojo que f puede ser función cualquiera, no necesariamente inyectiva!

Puede ser:

- $f(1) = 1 = f(2)$ (cuando $f(1) + f(2) = 2$)

ó
- $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ (caso $f(1) + f(2) = 3$)

ó
- $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ (también)

Y son casos excluyentes entre sí (definen funciones distintas).

Para el resto de los valores $3, 4, \dots, 7$ no hay restricciones, o sea

$$\left\{\begin{array}{l} f(3) \text{ tiene } 7 \text{ posibilidades} \\ \vdots \quad \text{y} \\ f(7) \text{ tiene } 7 \text{ posibilidades} \end{array}\right.$$

hay 5 valores con 7 posibilidades cada uno

Así, la cantidad total es

$$\underbrace{7^5}_{\substack{\text{caso } f(1) \\ = f(2) = 1}} + \underbrace{7^5}_{\substack{\text{caso } f(1)=1 \\ f(2)=2}} + \underbrace{7^5}_{\substack{\text{caso } f(1)=2 \\ f(2)=1}} = 3 \cdot 7^5$$

Ejercicio 2:

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, vale que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{n+1}$$

Por inducción corrida empezando en $n = 2$:

$p(n): \quad \prod_{k=1} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{n+1}$

<u>Caso base</u> $(n=2)$

¿$p(2)$ V? Sí pues $\prod_{k=1}^{2} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2.1-1}{2.1} \cdot \frac{2.2-1}{2.2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} > \frac{1}{3}$$

pues $3.3 > 1.8$ (son todos números positivos, no cambian los sentidos de las desigualdades)

<u>Paso inductivo</u>

Sea $h \geqslant 2$. ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V ?

<u>HI</u>: $p(h)$ V, es decir $\prod_{k=1}^{h} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{h+1}$

<u>Qpq</u>: $p(h+1)$ V, es decir $\prod_{k=1}^{h+1} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{h+2}$

Pero: $\prod_{k=1}^{h+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^{h} \frac{2k-1}{2k}\right) \frac{2(h+1)-1}{2(h+1)}$

$$= \left(\prod_{k=1}^{h} \frac{2k-1}{2k}\right) \frac{2h+1}{2h+2}$$

$$\underset{HI}{>} \frac{1}{h+1} \, \frac{2h+1}{2h+2}$$

(Al ser $\frac{2h+1}{2h+2} > 0$, no cambia el sentido de la desigualdad al aplicar la HI)

Con lo cual para probar que $p(h+1)$ es V, alcanza con probar que

$$\frac{1}{h+1} \frac{2h+1}{2h+2} \geq \frac{1}{h+2}$$

pues así tendremos

$$\prod_{k=1}^{h+1} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{h+1} \frac{2h+1}{2h+2} \geq \frac{1}{h+2}$$

y como en la cadena hay una desigualdad estricta, la desigualdad entre $\prod_{k=1}^{h+1} \frac{2k-1}{2k}$ y $\frac{1}{h+2}$ es estricta también.

Probemos entonces que $\frac{1}{h+1} \cdot \frac{2h+1}{2h+2} \geq \frac{1}{h+2}$, $\forall h \geq 2$

Pero, al ser todos términos positivos, podemos multiplicar sin cambiar los sentidos de las desigualdades, o sea

$$\frac{1}{h+1} \frac{2h+1}{2h+2} \geq \frac{1}{h+2} \iff (h+2)(2h+1) \geq (h+1)(2h+2)$$

$$\iff \cancel{2h^2} + 5h + \cancel{2} \geq \cancel{2h^2} + \cancel{4h} + \cancel{2}$$

$$\iff h \geq 0$$

(lo cual es cierto pues $h \geq 2$).

Hemos probado el caso base + el paso inductivo, por lo tanto $p(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. $\boxtimes$

Ejercicio 3 :

(a) Calcular $r_{16}(9^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

(b) Dado $n \in \mathbb{N}_0$, probar que

$$16 \mid 37 \cdot 9^n + 4n^2 + 12n - 21 \iff \begin{cases} n \equiv 0 \ (4) \\ \text{ó} \\ n \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

(a) Miremos algunos casos para ayudarnos:

- $9^0 = 1 \equiv 1 \ (16) \Rightarrow r_{16}(9^0) = 1$
- $9^1 = 9 \equiv 9 \ (16) \Rightarrow r_{16}(9^1) = 9$
- $9^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ 5 \cdot 16 + 1}}{81} \equiv 1 \ (16) \Rightarrow r_{16}(9^2) = 1$
- $9^3 = 9^2 \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 \ (16)$

  $\equiv 9 \ (16) \Rightarrow r_{16}(9^3) = 9$

Pareciera ser que $r_{16}(9^n) = 1$ si n es par

y $r_{16}(9^n) = 9$ si n es impar.

Probemoslo:

Sea n par, o sea $n = 2k$ para algún $k \geq 0$

Entonces $9^n = 9^{2k} = 81^k \equiv 1^k \equiv 1 \ (16)$

o sea $r_{16}(9^n) = 1$

Sea n impar, o sea $n = 2k+1$ para algún $k \geq 0$

Entonces $9^n = 9^{2k+1} = (9^{2k}) \cdot 9 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{caso par}}}{\equiv} 1 \cdot 9 \equiv 9 \ (16)$

o sea $r_{16}(9^n) = 9$.

En conclusión,

$$r_{16}(9^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 9 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

(b) Empezamos simplificando el enunciado. Tenemos

$$16 \mid 37 \cdot 9^n + 4n^2 + 12n - 21$$

$$\Updownarrow$$

$$37 \cdot 9^n + 4n^2 + 12n - 21 \equiv 0 \ (16)$$

Estudiemos entonces $37 \cdot 9^n + 4n^2 + 12n - 21$ módulo 16:

$$37 \cdot 9^n + 4n^2 + 12n - 21 \equiv 5 \cdot 9^n + 4n^2 - 4n - 5 \ (16)$$

$$\equiv 5(9^n - 1) + 4n(n-1) \ (16)$$

O sea queremos probar que

$$5(9^n - 1) + 4n(n-1) \equiv 0 \ (16) \iff n \equiv 0 \ (4) \text{ ó } n \equiv 3 \ (4)$$

Ojo que es un $\iff$: hay que probar las 2 implicaciones:

$(\Leftarrow)$ $n \equiv 0(4)$ ó $n \equiv 3(4) \Rightarrow 5(9^n-1)+4n(n-1) \equiv 0(16)$

Y

$(\Rightarrow)$ $5(9^n-1)+4n(n-1) \equiv 0(16) \Rightarrow n \equiv 0\ (4)$ ó $n \equiv 3(4)$

$(\Leftarrow)$ Parece más sencillo: Consideramos los 2 casos

(*) $n \equiv 0(4) \Rightarrow n$ es par $\underset{(a)}{\Rightarrow} 9^n - 1 \equiv 1-1 \equiv 0\ (16)$

y $n(n-1) \equiv 0(-1) \equiv 0(4) \Rightarrow 4n(n-1) \equiv 0\ (16)$

(pues $4 \mid n(n-1) \Rightarrow 16 \mid 4n(n-1)$)

Así, $5(9^n-1)+4n(n-1) \equiv 5\cdot 0 + 0 \equiv 0\ (16)$ ✓

(*) $n \equiv 3(4) \Rightarrow n$ es impar $\underset{(a)}{\Rightarrow} 9^n - 1 \equiv 9-1 \equiv 8\ (16)$

y $n(n-1) \equiv 3(3-1) \equiv 3\cdot 2 \equiv 6 \equiv 2\ (4)$ | pues $4 \mid n(n-1)-2$

$\Longrightarrow 4n(n+1) \equiv 4\cdot 2\ (4\cdot 4)$ | $\Rightarrow 4\cdot 4 \mid 4[n(n-1)-2]$

$\equiv 8\ (16)$

Así, $5(9^n-1)+4n(n-1) \equiv 5\cdot 8 + 8\ (16)$

$\equiv 6\cdot 8\ (16)$

$\equiv 0\ (16)$

Hemos probado $(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$ Lo más sencillo es hacerlo por la contrarecíproca:

ver que para los restantes valores de n,

$$5(9^n-1)+4n(n-1) \not\equiv 0\ (16)$$

Pero si $n \not\equiv 0(4)$ y $n \not\equiv 3(4)$, entonces

$$n \equiv 1(4) \text{ ó } n \equiv 2(4).$$

O sea alcanza con verificar que si $n \equiv 1(4)$ ó $n \equiv 2(4)$ entonces $5(9^n-1)+4n(n-1) \not\equiv 0\ (16)$

* $n \equiv 1(4) \Rightarrow n$ impar, y entonces

$$9^n-1 \underset{(a)}{\equiv} 9-1 \equiv 8\ (16)$$

y $\quad n(n-1) \equiv 1.0 \equiv 0\ (4) \Rightarrow 4n(n-1) \equiv 0\ (16)$

Así $\quad 5(9^n-1)+4n(n-1) \equiv 5.8+0 \quad (16)$

$$\equiv 40 \equiv 8 \not\equiv 0\ (16)$$

* $n \equiv 2(4) \Rightarrow n$ par, y entonces

$$9^n-1 \underset{(a)}{\equiv} 1-1 \equiv 0\ (16)$$

y $\quad n(n-1) \equiv 2\cdot 1 \equiv 2\ (4) \Rightarrow 4n(n-1) \equiv 8\ (16)$

Así $\quad 5(9^n-1)+4n(n-1) \equiv 0+8 \equiv 8 \not\equiv 0\ (16).$

¡Y terminamos! $\boxtimes$

Ejercicio 4:

Determinar todos los $m \in \mathbb{N}$ tq $(m:240)=40$ y m tiene exactamente 16 divisores positivos.

¡Siempre conviene coprimizar!

$(m : 240) = 40 \iff m = 40\, m'$ con

$m' \perp \frac{240}{40}$, es decir $m' \perp 6$

O sea m' no contiene ni 2 ni 3 en su factorización

Por lo tanto

$$m = 40\, m' = 2^3 \cdot 5 \cdot m'$$

donde $m' = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ para algún $r \geq 0$, y $k_1, .., k_r \geq 1$

y sobre todo, $p_1, .., p_r$ no son 2 ni 3 !

Pero puede haber algún $\underline{\underline{p_i = 5}}$ (podemos suponer que es p_1). En ese caso

$$m = 2^3 \cdot 5^{k_1+1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \qquad (\text{con } p_i \neq 2, 3, 5)$$

$$\text{y } \# \mathcal{D}iv_+(m) = (3+1)(k_1+1+1)(k_2+1) .. (k_r+1)$$

$$= 4 \underset{\geq 3}{(k_1+2)} \underset{\geq 2}{(k_2+1)} \cdots \underset{\geq 2}{(k_r+1)}$$

En este caso $4(k_1+2)(k_2+1) .. (k_r+1) = 16$

$$\iff (k_1+2)(k_2+1) \cdots (k_r+1) = 4$$

Pero $k_1 + 2 \geq 3$ y son todos naturales:

la única posibilidad es $k_1 + 2 = 4$, o sea $k_1 = 2$

y no hay más términos ($r = 1$ nomás con $p_1 = 5$)

Así, $m = 2^3 \cdot 5^3$ cumple con lo pedido:

$(m : 240) = 40$ y $\# \mathcal{D}iv_+(m) = 4 \cdot 4 = 16$

Si ningún $p_i = 5$, entonces

$$m = 2^3 \cdot 5^1 \cdot p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \quad \text{con } p_1, \dots, p_r \neq 2,3,5$$

y $\# \mathcal{D}iv_+(m) = 4 \cdot 2 \cdot (k_1+1) \cdots (k_r+1) = 16$

$$\iff (k_1+1) \cdots (k_r+1) = 2$$

Y esto puede ocurrir sólo si $r = 1$ y $k_1 = 1$
(pues $k_i \geq 1$, $1 \leq i \leq r$)

Así $m = 2^3 \cdot 5 \cdot p$ con $p \neq 2, 3, 5$

y efectivamente

$$(m : 240) = 40 \text{ y } \# \mathcal{D}iv_+(m) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Y no hay otras posibilidades ...

$\boxtimes$