FINAL 05/09/11 ✓

① Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto y sea $f: C \to \mathbb{R}$ una función continua.
Probar que existen X_{min} y X_{max} en C tales que $f(X_{min}) \leq f(x) \leq f(X_{max})$ $\forall x \in C$.

② Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x^2} + y^4 - 2y^2$.

a) Hallar los máximos y mínimos locales de f.

b) Decidir si f tiene máximos y mínimos globales.

③ a) Probar que si $F: (a, +\infty)$ es creciente y acotada, existe $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ y coincide con $\sup\{F(x), x \in (a,+\infty)\}$.

b) Sean $f, g: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas y tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, +\infty)$.
Probar que si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

④ Sea $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua y para $r \in (0, +\infty)$ sea $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$.
Sea $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(r) = \int_{C_r} g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$. Probar que F es derivable y que
$F'(r) = 2\pi r . g(r)$ $\forall r \in (0, +\infty)$

05/09/11

1) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto y $f: C \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que $\exists$ X_{min} y X_{Max} en C tales que $f(X_{min}) \leq f(x) \leq f(X_{MAX})$ $\forall x \in C$

Por teorema de Weierstrass, la imagen de f es un conjunto compacto. O sea, $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$.

Sea $\{X_n\} \subseteq C$ una sucesión de ~~números~~ puntos de C que verifica que $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$. (Que existe pues C es un conjunto compacto).

Sea $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} X_n}$

Entonces $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = M$. Como f es continua,

$$\underset{\text{Con } X\in C}{f(X)} \leq M = \lim_{n\to\infty} f(X_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = \underbrace{f(S)}_{X_{MAX}}$$

Y sabemos que $S \in C$ porque C es compacto y X_n es una sucesión de puntos de C.

Análogamente para el mínimo

---

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = e^{x^2} + y^4 - 2y^2$

a) Hallar los máx y min locales de F

b) Decidir si f tiene máximos y mínimos globales.

a) $\nabla f = (f_x, f_y) = \left(2x e^{x^2},\ 4y^3 - 4y\right) = (0,0) \Leftrightarrow$

$x = 0$		
$y = 0$	$y = 1$	$y = -1$

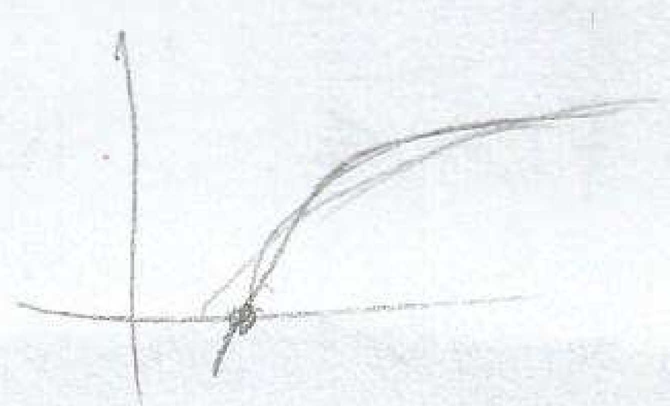
$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -8 \Rightarrow$ punto silla

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 16 \Rightarrow$ Mínimo (porque $f_{xx} > 0$, $\det > 0$)

$(0,1) \to$ min local $= 0$

$(0,-1) \to$ min local $= 0$



$e^{x^2} \geq 1$ $\forall x$ porque $x^2 \geq 0 \Rightarrow$

$y^4 - 2y^2 \geq -1 \Rightarrow$ busco el mínimo de $y^4 - 2y + 1$.

$\Rightarrow e^{x^2} + y^2 - 2y^2 \geq 0 \Rightarrow$ ~~Hay~~ mínimos globales

③ ⓐ $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ es creciente y acotada $\Rightarrow \exists \lim_{x\to\infty} f(x)$ y

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup\{f(x) : x\in(a;+\infty)\}$

ⓑ $f,g:(a;+\infty)$ continuas, $0\le f(x)\le g(x)\ \forall x\in(a;+\infty)$

Probar que $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

~~ⓐ Sea X_n una sucesión de puntos de la imagen de f.~~

~~$\Rightarrow X_n$ entonces es una sucesión creciente y acotada.~~

$\lim_{x\to\infty} f(x) = S \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists M>0 \quad x>M \Rightarrow |f(x)-S|<\varepsilon$

$S=\sup\{f(x): x\in(a;+\infty)\} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M\in(a,+\infty): S-\varepsilon<f(M)<S$

$S-\varepsilon<f(M)<S<S+\varepsilon$

Sumo y resto S a y sumo ε.

$\boxed{|f(M)-S|<\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in(a,+\infty): |f(M)-S|<\varepsilon$

Sea $x>M \Rightarrow S-\varepsilon<f(M)<f(x)<S<S+\varepsilon$

$|f(x)-S|<\varepsilon$

$\Rightarrow x>M \longrightarrow$ y esto es la def.

ⓑ Sea $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $\Rightarrow$ por TFC F, G crecientes y continuas y todo lo mucho

como $f\le g \Rightarrow F\le G \le \int_a^x g(t)\,dt \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

$\Rightarrow F(x)\le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \infty$

Como F es creciente y acotada, tiene límite. y $\lim_{x\to\infty} F = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$

05/09(11)

(4) $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ continua y $\forall r\in(0;+\infty)$ $C_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq r^2\}$

$F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad F(r)=\int_{C_r} g(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$. Probar que F es derivable y $F'(r)=2\pi r.\,g(r)$

$$F(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^r g(r).\,r.\,dr\,d\theta$$

$$F(r)=2\pi\cdot\int_0^r g(r)\,r\,dr \Rightarrow F'(r)=2\pi.\,r.\,g(r)$$

Porque g es continua y r es continua $\to g(r).r$ es continua