91

Álgebra I - 2do Parcial - Tema B

7 de Julio de 2023

Apellidos: MARTÍNEZ
Nombres: FAUSTO NICOLÁS

Número de Libreta ó DNI: 363/23

Turno: MAÑ(A)
Carrera: LIC. CS. DATOS

1	2	3	4	Nota
B	B-	B-	B-	8,75

Usar hojas distintas para ejercicios distintos. Exhibir todos los cálculos. Justificar todas las respuestas. Escribir con tinta y con letra clara y legible.

No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Hallar todos los pares $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen simultáneamente

$$728\,\mathbf{a} + 952\,\mathbf{b} = 56 \text{ y } (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^{2022} \equiv 114 \pmod{11}.$$

Ejercicio 2. Sea $w = e^{\frac{2}{95}\pi i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$w^{7n+174} = \sum_{k=20}^{970} w^k$$

Ejercicio 3. a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\dfrac{3\pi}{2}$.

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

Ejercicio 4. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(n^{385} + 17n + 68 : 2023) = 119.$$

Expresar las soluciones mediante una única ecuación.

MARTÍNEZ FAUSTO
Martínez, Fausto - Hoja 1

1) Arranco resolviendo la diofántica, el primer paso es coprimizar, luego como $(728:952)=56$ y $56|56$, el sistema (o mejor dicho la primer ecuación) tiene solución.

$\Rightarrow$ Coprimizando queda $13a+17b=1$.

A simple vista veo que $a=4$, $b=-3$ es solución particular, luego la solución de la ecuación es

$$\begin{cases} 4+17k=a \\ -3-13k=b \end{cases} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Luego $(a+2b)^{2022}\equiv 114 \pmod{11} \Leftrightarrow$

$$(4+17k+2(-3-13k))^{2022}\equiv 4 \pmod{11}$$

$$(-2-9k)^{2022}\equiv 4\ (11)$$

Es deducible que $11\nmid -2-9k$ pues si lo hiciera, $(-2-9k)^{2022}\equiv 0\ (11)$ y no sería solución, luego como $11\nmid -2-9k \Rightarrow$ Vale Pequeño Teorema de Fermat.

Obs: Si, hay casos donde $11|-2-9k$ pero no me interesan pues no son solución.

Luego $(-2-9k)^{2022}\equiv(-2-9k)^{10(2022)}\pmod{11}\equiv(-2-9k)^2\pmod{11}$

Ahora, con tabla de restos:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(-2-9k)^2$	4	0	4	5	3	9	1	1	9	3	5

Luego la condición se cumple si y sólo si $\boxed{k\equiv 0\ (11)}$ ✓ $\boxed{k\equiv 2\ (11)}$

Si $k\equiv 0(11) \Rightarrow k=11j$, $j\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4+17k \\ b=-3-13k \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=4+187j \\ b=-3-143j \end{cases}},\ j\in\mathbb{Z}$$

Si $k\equiv 2\ (11) \Rightarrow k=2+11j$, $j\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4+17k \\ b=-3-13k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+17(2+11j) \\ b=-3-13(2+11j) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=38+187j \\ b=-29-143j \end{cases}},\ j\in\mathbb{Z}$$

Luego los pares $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen ambas condiciones son:

$$\boxed{\begin{cases} a = 4 + 187j \\ b = -3 - 143j \end{cases}} \quad , \quad \boxed{\begin{cases} a = 38 + 187j \\ b = -29 - 143j \end{cases}} \quad j \in \mathbb{Z}$$

Rta Rta

MARTÍNEZ FAUSTO - Hoja 2

2) Lo primero que observo es que $\omega \in G_{95}$ pues $G_{95} = \{ e^{\frac{2k\pi}{95} i}, k \in \mathbb{Z} \}$

Entonces analizo la sumatoria

$$\sum_{k=20}^{970} \omega^k = \sum_{k=0}^{970} \omega^k - \sum_{k=0}^{19} \omega^k = \frac{\omega^{971}-1}{\omega-1} - \frac{\omega^{20}-1}{\omega-1}$$

Ahora, como $\omega^{95} = 1 \Rightarrow \left[\omega^{971} = (\omega^{95})^{10} \cdot \omega^{21} = \omega^{21} \right]$

$$\Rightarrow \frac{\omega^{971}-1}{\omega-1} - \frac{\omega^{20}-1}{\omega-1} = \frac{\omega^{21}-1}{\omega-1} - \frac{\omega^{20}-1}{\omega-1}$$

$$= \frac{\omega^{21}-\omega^{20}}{\omega-1} = \frac{\omega^{20}\cancel{(\omega-1)}}{\cancel{\omega-1}} = \boxed{\omega^{20}}$$

$\Rightarrow$

$$\omega^{7n+174} = \omega^{20}, \text{ como } \omega \in G_{95}$$

esto pasa si y solo si $7n+174 \equiv 20 \ (95)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+4 \equiv 0 \ (5) \\ 7n+3 \equiv 1 \ (19) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \equiv 1 \ (\text{mod } 5) & (1) \\ 7n \equiv 17 \ (19) & (2) \end{cases}$$

(1) Como $3 \perp 5$, multiplico por 3 ambos lados

$$\Rightarrow 6n \equiv 3 \ (5) \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 3 \ (5)}$$

(2) Como $8 \perp 19$ multiplico por 8 ambos lados

$$56n \equiv 136 \ (19) \Leftrightarrow -n \equiv 3 \ (19) \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 16 \ (19)}$$

Juntando ambas condiciones, por Teorema Chino del Resto

Como los módulos son coprimos, hay una única solución entre 0 y 94 con congruencia

$$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 3 \ (5) \\ n \equiv 16 \ (19) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 73 \ (\text{mod } 95)}$$ Respuesta.

Como $n = 73$ cumple ambas condiciones y está entre 0 y 94 es la solución particular

Queremos TODOS los $n \in \mathbb{N}$ que cumplan

MARTÍNEZ FAUSTO - Hoja 3

3) $f = x^6 - 4x^5 - x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 48x + C$

Tengo que cumplir que f tenga una raíz con $\arg \neq (3\pi/2)$, voy a llamar α a esa raíz.

Luego $\alpha = -ri$ con $r \in \mathbb{R}_{>0}$, por prop. del argumento

$\Rightarrow 0 = f(\alpha) = (-ri)^6 - 4(-ri)^5 - (-ri)^4 + 4(-ri)^3 + 4(-ri)^2 + 48(-ri) + c$

$\Leftrightarrow 0 = f(\alpha) = -r^6 + 4r^5 i - r^4 + 4r^3 i - 4r^2 - 48ri + c$

Luego, si $f(\alpha) = 0$, $Re(f(\alpha)) = 0 \wedge Im(f(\alpha)) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -r^6 - r^4 - 4r^2 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = r^6 + r^4 + 4r^2} \\ 4r^5 + 4r^3 - 48r = 0 \end{cases}$

Ahora, $4r^5 + 4r^3 - 48r = 0 \Leftrightarrow 4r(r^4 + r^2 - 12) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{r = 0} \rightarrow$ En este caso $\arg(\alpha) \neq 3\pi/2$ así que lo descarto

o $r^4 + r^2 - 12 = 0$. Sea ahora $y = r^2$.

$\Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$, Por fórmula de Bhaskara, los raíces son $\frac{-1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 1 - 4 \cdot (-12) \cdot 1$

$\hookrightarrow w_1 = 7$

$\hookrightarrow w_2 = -7$

$\Rightarrow y_1 = \frac{-1+7}{2} = \boxed{3}$

$y_2 = \frac{-1-7}{2} = \boxed{-4}$

Luego $\underline{r^2 = 3}$ o $r^2 = -4 \hookrightarrow$ Abs. pues $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$\Rightarrow \underline{r^2 = 3} \Rightarrow c = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3$

$\boxed{c = 48}$

Luego $f = x^6 - 4x^5 - x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 48x + 48$.

b) Por a) se que $x^2 + 3 \mid f$. Luego:

$$
\begin{array}{l|l}
x^6-4x^5-x^4+4x^3+4x^2+48x+48 & x^2+3 \\
\underline{-x^6 \quad -3x^4} & x^4-4x^3-4x^2+16x+16 \\
-4x^5-4x^4+4x^3+4x^2+48x+48 & \\
\underline{+4x^5 \quad +12x^3} & \\
-4x^4+16x^3+4x^2+48x+48 & \\
\underline{+4x^4 \quad +12x^2} & \\
16x^3+16x^2+48x+48 & \\
\underline{-16x^3 \quad -48x} & \\
16x^2+48 & \\
\underline{-16x^2-48} & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow f = (x^2+3)\cdot g$ con $g = x^4-4x^3-4x^2+16x+16$.

Luego como por Lema de Gauss las raíces racionales de g están en $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16\}$

y $g(1)\neq0$, $g(-1)\neq0$, $g(2)\neq0$, $g(-2)\neq0$, $g(4)\neq0$

$g(-4)\neq0$, $g(8)\neq0$, $g(-8)\neq0$, $g(16)\neq0$, $g(-16)\neq0$

$\Rightarrow$ Ni f ni g tienen raíces racionales.

Ahora como f tiene raíces dobles, g también.

Luego $g' = 4x^3-12x^2-8x+16 = 4(\underbrace{x^3-3x^2-2x+4}_{h})$

Por Lema de Gauss las raíces de ese polinomio h están en $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$ y $h(1)=0$

Luego

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-3x^2-2x+4 & x-1 \\
\underline{-x^3+x^2} & x^2-2x-4 \\
-2x^2-2x+4 & \\
\underline{+2x^2-2x} & \\
-4x+4 & \\
\underline{+4x-4} & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow h = (x-1)(\underbrace{x^2-2x-4}_{j})$

Por Bhaskara las raíces de j son $\dfrac{2+w}{2}$ con ¡impecable!

$w^2 = 4-4\cdot(-4)\cdot1 \rightarrow w_1 = 2\sqrt5$, $w_2 = -2\sqrt5$ luego $j_1 = 1+\sqrt5$, $j_2 = 1-\sqrt5$

Como 1 no es raíz de g, $1+\sqrt5$ y $1-\sqrt5$ deben serlo

MARTÍNEZ FAUSTO - Hoja 4

Luego $(x-(1+\sqrt{5}))(x-(1-\sqrt{5}))$

$= x^2-(1+\sqrt{5})x-(1-\sqrt{5})x+(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$

$= x^2 - x(1+\cancel{\sqrt{5}}+1-\cancel{\sqrt{5}})+1-\cancel{\sqrt{5}}+\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{5}\sqrt{5}$

~~$= x^2-2x+6 \mid f. \Rightarrow x^2-2x+6 \mid g$~~

~~$\Rightarrow$ Luego~~

~~$x^4-4x^3-4x^2+16x+16 \mid x^2-2x+6$~~
~~$-x^4+2x^3-6x^2 \qquad x^2-2x-14$~~
~~$-2x^3-10x^2+16x+16$~~
~~$+2x^3-4x^2+12x$~~
~~$-14x^2+28x+16$~~
~~$+14x^2-28x+84$~~
~~100 ?~~

$x^2-2x-4 \mid f.$

$\Rightarrow x^2-2x-4 \mid g.$

Luego

~~$x^4-4x^3-4x^2+16x+16 \mid x^2-2x-4$~~
~~$-x^4+2x^3+4x^2 \qquad x^2+2x+4$~~
~~$-2x^3+16x+16$~~
~~$-2x^3+4x^2+8x$~~
~~$4x^2+24x+16$~~
~~$-4x^2+8x+16$~~
~~$32x+32$?~~

$x^4-4x^3-4x^2+16x+16 \mid x^2-2x-4$
$-x^4+2x^3+4x^2 \qquad x^2-2x-4$
$-2x^3+16x+16$
$+2x^3-4x^2-8x$
$-4x^2+8x+16$
$+4x^2-8x-16$
0

¿Por qué son irreducibles?

$\Rightarrow \boxed{f=(x^2+3)(x^2-2x-4)^2}$. Fact en $\mathbb{Q}[x]$

$\boxed{f=(x^2+3)(x-(1+\sqrt{5}))^2(x-(1-\sqrt{5}))^2}$ Fact en $\mathbb{R}[x]$

Fact en $\mathbb{C}[x]$

$$\boxed{f = (x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)(x-(1-\sqrt{5}))^2(x-(1+\sqrt{5}))^2}$$

En $\mathbb{C}[x]$, los polinomios son todos de grado 1

En $\mathbb{R}[x]$, solo hay uno de grado 2 que tiene discriminante negativo, así que es irreducible

En $\mathbb{Q}[x]$, solo hay polinomios de grado 2 con ninguna raíz racional, así que son irreducibles

Por lo tanto, las factorizaciones mencionadas son todas producto de polinomios irreducibles (Perdón la desprolijidad en este punto, me quedaba sin tiempo)

Está joya!

MARTÍNEZ FAUSTO - Hoja 5

4) $(n^{385}+17n+68 : 2023) = 119$

Como $2023 = 7 \cdot 17^2$ y $119 = 7 \cdot 17$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 \mid n^{385}+17n+68 \\ 17 \mid n^{385}+17n+68 \\ 289 \nmid n^{385}+17n+68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^{385}+17n+68 \equiv 0\ (7) & ① \\ n^{385}+17n+68 \equiv 0\ (17) & ② \\ n^{385}+17n+68 \not\equiv 0\ (289) & ③ \end{cases}$$

① $7 \mid n \Rightarrow 68 \equiv 0\ (7)$ Absurdo!

$7 \nmid n \Rightarrow n^6 \equiv 1\ (7) \Rightarrow n^k \equiv n^{r_6(k)}\ (7)$

$\Rightarrow n^{385} \equiv n \pmod 7$

$\Rightarrow 18n + 68 \equiv 0\ (7)$

$\Leftrightarrow 4n \equiv 2\ (7)$, multiplico por 2 ya que es coprimo con 7

$\Leftrightarrow 8n \equiv 4\ (7)$

$\Leftrightarrow \boxed{n \equiv 4\ (7)}$

② $17 \mid n \Rightarrow 68 \equiv 0\ (17)$ ✓

$17 \nmid n \Rightarrow n^{385}+0+0 \equiv 0\ (17) \Leftrightarrow n \equiv 0\ (17) \Rightarrow 17 \mid n$ Abs.

Luego como $17 \mid n \Rightarrow \boxed{n \equiv 0\ (17)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 4\ (7) \\ n \equiv 0\ (17) \end{cases} \overset{TCR}{\Longleftrightarrow} \boxed{n \equiv 102\ (119)}$$

Pero $n^{385} + 17n + 68 \not\equiv 0\ (289)$

Los n que cumplen son los que cumplen estas dos condiciones

Faltó explicar un poco más esto