Criterio de aprobación: El examen consta de dos partes A y B. En la Parte A, resuelva a lo sumo 5 ejercicios, cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. La Parte B, resuelta correctamente suma 5 puntos. El final se aprueba con 6 puntos.

Parte A

B λ

1. Una enfermedad afecta a una de cada 500 personas de cierta población. Se usa un examen radiológico para detectar posibles enfermos. Se sabe que la probabilidad de que el examen aplicado a un enfermo lo muestre como tal es 0,90 y que la probabilidad de que el examen aplicado a una persona sana la muestre como enferma es 0,01. Calcular la probabilidad de que una persona esté realmente enferma si su examen dio positivo (es decir lo diagnostica como enferma).

λ B

2. Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 3{,}2$. Calcule $P(N_3 - N_1 = 0)$ y $P(N_2 = 7, N_5 = 11)$. Justifique sus cálculos.

OK.

3. Sean X e Y variables aleatorias que satisfacen

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 1/10, & x = 1,2,3,4, \ \ y = 1,2,3,4 \text{ e } y \leq x \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   a) Calcular el coeficiente de correlación entre X e Y y decidir si las variables son o no independientes.

   b) Calcular $P(X = 4|Y = 3)$ y $P(X = 0|Y = 3)$.

M

4. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \sim \text{Binomial}(n,p)$. Demuestre que

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{n(1-p)p}}$$

converge en distribución a una variable normal, y especifique con que parámetros.

5. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ para una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[\theta, 1]$. Demuestre que es un estimador consistente.

λ B

6. Construya un intervalo asintótico de confianza $(1-\alpha)$ para el parámetro p de una distribución Bernoulli.

O

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aletorias i.i.d., con distribucion normal con media μ y varianza $\sigma^2 = 1$. Proponga una región de rechazo de nivel 0,05 para testear

M

$$H_0 = \{\mu = 5\} \quad vs. \quad H_1 = \{\mu > 5\}\ .$$

B.

Se tomó una muestra de tamaño $n = 12$, obteniendose un p-valor 0,048. Indique para cuales de los siguientes niveles puede rechazar H_0 con los datos obtenidos:

$$\alpha = 0{,}1\ , \quad \alpha = 0{,}05\ , \quad \alpha = 0{,}01\ , \quad \alpha = 0{,}005$$

Parte B: 5

1. Enuncie y demuestre la regla de multiplicación de las probabilidades condicionales. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

2. Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar la regla de la multipicación. NO incluya la resolución del ejercicio.