1	2	3	4	5	Nota

7

Probabilidad y Estadística (C)

Primer Parcial - 16/5/2013

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen. Antes de retirarse debe firmar una hoja de asistencia.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA N°:

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario tener dos ejercicios completos bien y reunir 60 puntos.

En los ejercicios donde corresponda, defina con palabras las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

Realizar cada ejercicio en hoja separada. *Enumerar todas las hojas y colocar el número total de hojas entregadas, además escribir el apellido en cada una.*

1. (10 puntos.) Nueve personas se suben al metrobus en la estación terminal. Este bus tiene la máquina expendedora de boletos rota con lo cual, durante su recorrido nadie más subirá. Dicho recorrido tiene 12 paradas. Cada persona selecciona al azar una parada en la que bajará.

a) (4 puntos) Calcular la probabilidad de que todas las personas se bajen antes de la cuarta parada.

b) (6 puntos) Calcular la probabilidad de que en ninguna parada se baje más de una persona.

c) (10 puntos) Calcular la probabilidad de que entre la quinta y la sexta parada sólo viajen 2 personas.

2. (22 puntos) El número de buques que llegan en un día a un puerto tiene una distribución Poisson con esperanza 2. Las actuales instalaciones portuarias pueden estacionar a lo sumo 3 buques al día, con lo cual si llegan más de 3 buques el exedente se enviará a otro puerto.

a) (4 puntos.) ¿Cuál es la probabilidad de tener que enviar a otro puerto algún buque en un día determinado?

b) (8 puntos.) ¿Cuál es el número esperado de buques que llegan en un día? ¿Cuál es el número esperado de buques estacionados diariamente en dicho puerto? ¿ Cuál es el número más probable de buques estacionados diariamente?

c) (10 puntos.) El puerto tiene una encargada a la que se le paga 100 pesos por día y además, por cada buque que deriva a otro puerto recibe 50 pesos extra. Definimos W = Sueldo diario de la encargada. Encontrar la esperanza de W.

3. (18 puntos.) Sean $X \sim N(1,4)$ e $Y \sim N(-1,4)$ variables aleatorias independientes.

a) (4 puntos.) Calcular

$$\int_0^1 f_X(x)dx.$$

b) (6 puntos.) Calcular $P(|3Y| \geq 5)$.

c) (8 puntos.) Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual

$$P(\{X > a\} \cup \{Y < -a\}) = 0.81.$$

4. (20 puntos.) Un grupo de estudiantes realiza la fiesta de la cerveza. A dicho evento asisten 18 hombres y 22 mujeres. Se sabe que la cantidad de cerveza en litros que toma un hombre durante la fiesta es una variable aleatoria con distribución $U[0,4]$ mientras que la cantidad de cerveza (en litros) que toma una mujer durante la fiesta es una variables con distribución $E(\frac{2}{5})$.

a) (2 puntos.) María se emborracha si toma más de tres litros de cerveza. Hallar la probabilidad de que eso ocurra.

b) (3 puntos.) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan tome menos de tres litros de cerveza si había bebido al menos un litro?

c) (5 puntos.) Se toma al azar un participante luego de la fiesta. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado más de tres litros de cerveza en toda la noche?

d) (10 puntos.) Una persona está alcoholizada si toma más de 3 litros de cerveza. Calcular la probabilidad de que en la fiesta se hayan emborrachado más de dos personas.

NO 5. (20 puntos.) Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(x+1)\,y & \text{si } 0 < y < 1 \quad -y < x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) (3 puntos.) Hallar c y calcular $P((X,Y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{3}{2}])$.

b) (5 puntos.) Calcular $P(Y \leq 2X)$.

c) (12 puntos) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

⑦ 1

3 $X \sim N(1,4)$

$Y \sim N(-1,4)$

b) $P(|3Y| \geq 5) = 1 - P(|3Y| < 5$

$= 1 - P(-5 < 3Y < 5) = 1 - P\left(-\frac{5}{3} < Y < \frac{5}{3}\right)$

$= 1 - \left(\phi\left(\frac{1}{3}\right) - \phi\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \cancel{1} - \phi\left(\frac{1}{3}\right) - \cancel{1} + \phi\left(\frac{4}{3}\right)$

$- \phi(0.33) + \phi(1.33) = -0.6293 + 0.9082$

$= 0.2789$

c) $P(\{X > a\} \cup \{Y < -a\}) = 0.81$

$P(X > a) + P(X < -a) = 0.81$

$1 - \phi\left(\frac{a-1}{2}\right) + \phi\left(\frac{-a+1}{2}\right) = 0.81$

$2 - 2\phi\left(\frac{a-1}{2}\right) = 0.81$

$\phi\left(\frac{a-1}{2}\right) = 0.595$

$0.24 = \frac{a-1}{2}$

$a = 1.48$

2.

X: # buques que llegan al puerto en un día

$X \sim \mathcal{P}(2)$

a) $P(X \geq 3) = 1 - F_X(2) = 1 - 0.6767$

b) · $E(X) = 2$

Y: # buques estacionados

$$Y = \begin{cases} X & X \leq 2 \\ 3 & X > 2 \end{cases}$$

y	0	1	2	3
$P_Y(y)$	0.135	0.271	0.271	0.323

∴ $E(Y) = 0.271 + 2 * 0.271 + 3 * 0.323$
$= 1.782$

∴ El nro + probable de buques estacionados es 3

⑦ 2

c) D: # buques derivados

$$D = \begin{cases} 0 & X \leq 3 \\ X-3 & X > 3 \end{cases} \qquad R_g D = \mathbb{N}$$

$$E(D) = \overbrace{0 \cdot P(D=0)}^{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(D=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \underset{P(X-3=k)}{\underset{\parallel}{P(D=k)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k+3) \underset{k+3=j}{=} \sum_{j=4}^{\infty} (j-3)\, P(X=j) =$$

$$= \sum_{j=4}^{\infty} j\, P(X=j) - 3 \sum_{j=4}^{\infty} P(X=j)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} j\, P(X=j)}_{E(X)=2} - 3 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)}_{=1} - \sum_{j=0}^{3} (j-3)\, P(X=j)$$

$$= 2 - 3 - \sum_{j=0}^{3} (j-3) \frac{e^{-2}\, 2^j}{j!}$$

4.

FIESTA $\swarrow$ 18 H, 22 M

$P(H) = \frac{9}{20}$ C: Litros de cerveza que toma un invitado

$X = C|H \sim U[0,4]$

$Y = C|H^c \sim \mathcal{E}(\frac{2}{3})$

a) $P(\text{María wasted}) = P(C > 3 \cap H^c)$

$= P(C > 3 | H^c)\, P(H^c) = e^{-\frac{2}{3}*3} \frac{11}{20}$

$= 0.1657$

b) J: Litros de cerveza que toma Juan

$$P(J < 3 | J \geq 1) = \frac{P(1 \leq J < 3)}{P(J \geq 1)}$$

$$= \frac{\int_1^3 \frac{1}{4} dx \, \frac{9}{20}}{\int_1^4 \frac{1}{4} dx \, \frac{9}{20}} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

7 3

c)

$$P(C>3) = P(C>3|H)P(H) + P(C>3|\bar{H})P(\bar{H})$$

$$= \left(\int_3^4 \frac{1}{4}\,dx\right)\frac{9}{20} + e^{-\frac{6}{5}}\,\frac{11}{20}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{9}{20} + e^{-\frac{6}{5}}\,\frac{11}{20} = 0.2782$$

d) A: # personas borrachas

$$A \sim Bi(40,\ 0.2782)$$

$$P(A \geq 2) = 1 - F_X(1)$$

1.

X_i: parada en que baja i , $1 \leq i \leq 9$

$1 \leq X_i \leq 12$

a) $P\left(\bigcap_{i=1}^{9} \{X_i \in \{1,2,3\}\}\right) \underset{\uparrow \text{ IND}}{=} \prod_{i=1}^{9} P(X_i \in \{1,2,3\})$

$= \prod_{i=1}^{9} P(X_i = 1 \cup X_i = 2 \cup X_i = 3) =$

$= \prod_{i=1}^{9} \left(\sum_{j=1}^{3} P(X_i = j)\right) = \left(\frac{3}{12}\right)^9$

b) $\binom{12}{9} \left(\frac{1}{12}\right)^9$

c)

PARADA $\underbrace{\overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{3} \quad \overline{4} \quad \overline{5}}_{\text{SE BAJAN } 7}$ $\overline{6}$

$\cancel{\binom{9}{7}} \binom{11}{7} \left(\frac{1}{12}\right)^7$

$\frac{11!}{7!\,4!}$

(7) 4

1.

$S = \{(P_1, \dots, P_9) / P_i \in \{1, \dots, 12\}, \forall i \in \{1, \dots, 9\}\}$

$\#S = 12^9$

a) A: Todos bajan antes de la 4º parada

$P(A) = \frac{3^9}{12^9} = \left(\frac{3}{12}\right)^9$

b) B: En ninguna parada baja más de una persona

$P(B) = \frac{\prod_{i=0}^{8}(12-i)}{12^9} = \frac{\frac{12!}{3!}}{12^9} = 0.01547$

c) C: Entre la 5º y 6º parada sólo viajan 2 personas (entre la 1º y la 5º bajan 7 personas)

$P(C) = \frac{\binom{9}{7} 5^7 6^2}{12^9} = 0.01962$

3.

a) $\int_0^1 f_X(x) = F_X(1) - F_X(0)$

$= P\left(\frac{X-1}{2} \leq \frac{0}{2}\right) - P\left(\frac{X-1}{2} \leq -\frac{1}{2}\right)$

$= \phi(0) - \phi(-0.5) = 0.5 - 1 + \phi(0.5)$

$= -0.5 + 0.6915$

b) $P(|3Y| \geq 5)$

$= 1 - P\left(-\frac{5}{3} \leq Y \leq \frac{5}{3}\right)$

$= 1 - P\left(Y \leq \frac{5}{3}\right) + P\left(Y \leq -\frac{5}{3}\right)$

$= 1 - \phi\left(\frac{\frac{5}{3}+1}{2}\right) + \phi\left(\frac{-\frac{5}{3}+1}{2}\right)$

$= 1 - \phi\left(\frac{4}{3}\right) + \phi\left(-\frac{1}{3}\right)$

$= 2 - \phi\left(\frac{4}{3}\right) - \phi\left(\frac{1}{3}\right)$