ANÁLISIS I - ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA I - ANÁLISIS II (C)
1er. cuatrimestre 2022

TEMA 1

SEGUNDO PARCIAL - 02/07/2022

Recuerde justificar todas las respuestas.

1	2	3	4	Nota
3	1.5	3	0	7.5

NOMBRE Y APELLIDO: DANTE CULACIATI L.U.: 351/22 TURNO: 1

1. (3 puntos) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(1,-1)$ está dado por

$$T_2(x,y) = 17 - 3x + 7y + x^2 + 3y^2 - xy.$$

   (a) Decidir si $P = (1,-1)$ es punto crítico de f y, en tal caso, decidir si es máximo local, mínimo local o punto silla.

   (b) Calcular, si existe

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y) - 12}{\|(x-1, y+1)\|}$$

2. (2 puntos) Hallar los máximos y los mínimos absolutos de la función

$$f(x,y) = (x-1)(x-y)$$

en la región

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \sqrt{5} \text{ y } 0 \leq y \leq 5 - x^2\right\}.$$

3. (3 puntos)

   (a) Calcular

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{3}} \int_{3x}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx.$$

   (b) Calcular el volumen en el primer octante del sólido acotado por $z = 1 - y$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$.

4. (2 puntos) Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{2}\}$. Calcular la integral triple:

$$\iiint_W \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV.$$

Dante Cuiaciati | DNI: 45.428.879 | LU: 351/22 | HOJA N° 1 | FECHA

1) Tengo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(1,-1)$ está dado por

$$T_2(x,y) = 17 - 3x + 7y + x^2 + 3y^2 - xy$$

a) Quiero ver si $P=(1,-1)$ es punto crítico de f, y si lo es, ver si es máximo local, mínimo local, o punto silla.

En primer lugar, como f es de clase C^2, vale que:

- $f(1,-1) = T_2(1,-1) = 12$
- $f_x(1,-1) = T_{2_x}(1,-1)$ $\qquad T_{2_x}(x,y) = -3 + 2x - y \Rightarrow T_{2_x}(1,-1) = 0$
- $f_y(1,-1) = T_{2_y}(1,-1)$ $\qquad T_{2_y}(x,y) = 7 + 6y - x \Rightarrow T_{2_y}(1,-1) = 0$
- $f_{xx}(1,-1) = T_{2_{xx}}(1,-1)$ $\qquad T_{2_{xx}}(x,y) = 2 \Rightarrow T_{2_{xx}}(1,-1) = 2$
- $f_{yy}(1,-1) = T_{2_{yy}}(1,-1)$ $\qquad T_{2_{yy}}(x,y) = 6 \Rightarrow T_{2_{yy}}(1,-1) = 6$
- $f_{xy}(1,-1) = T_{2_{xy}}(1,-1)$ $\qquad T_{2_{xy}}(x,y) = -1 \Rightarrow T_{2_{xy}}(1,-1) = -1$

Observo que $\nabla f(1,-1) = \nabla T_2(1,-1) = (T_{2_x}(1,-1), T_{2_y}(1,-1)) = (0,0)$ ✓

Entonces, P = (1,-1) es un punto crítico de la función (pues anula el gradiente).

Para determinar si es un punto silla, un máximo local, o un mínimo local, calculo el determinante de la Hessiana de f en $(1,-1)$

$$Hf(1,-1) = HT_2(1,-1) = \begin{bmatrix} T_{2_{xx}}(1,-1) & T_{2_{xy}}(1,-1) \\ T_{2_{yx}}(1,-1) & T_{2_{yy}}(1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$ ✓

(vale la pena aclarar que, como f es C^2, $f_{xy} = f_{yx} \Rightarrow T_{2_{xy}}(1,-1) = T_{2_{yx}}(1,-1)$)

$\Rightarrow \det(Hf(1,-1)) = (2\cdot 6) - ((-1)\cdot(-1)) = 11 > 0 \Rightarrow (1,-1)$ es un máximo o mínimo local (TERMINA A LA VUELTA)

NOTA

Además, como $f_{xx}(1,-1) = 2 > 0 \Rightarrow$ $\underline{(1,-1) \text{ es un mínimo local de } f.}$ ✓

b) Quiero calcular, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y)-12}{\|(x-1,\ y+1)\|}$$

Observo que $f(x,y) = T_2(x,y) + R(x,y)$

Además, como $T_2(x,y)$ está centrado en el $(1,-1)$, vale que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{R(x,y)}{\|(x-1,\ y+1)\|} = 0$$

Entonces, reemplazando f y haciendo álgebra de límites nos queda:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y)-12}{\|(x-1,\ y+1)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{T_2(x,y)-12+R(x,y)}{\|(x-1,\ y+1)\|} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{T_2(x,y)-12}{\|(x-1,y+1)\|} + \underbrace{\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{R(x,y)}{\|(x-1,\ y+1)\|}}_{\to 0}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{17-3x+7y+x^2+3y^2-xy-12}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}$$

Para simplificar el límite, tomo

- $x' = x-1 \Rightarrow x'+1 = x$
- $y' = y+1 \Rightarrow y'-1 = y$

(Así, cuando $(x,y)\to(1,-1)$, $(x',y')\to(0,0)$)

Reemplazando:

$$\lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{5-3(x'+1)+7(y'-1)+(x'+1)^2+3(y'-1)^2-(x'+1)(y'-1)}{\sqrt{(x'+1-1)^2+(y'-1+1)^2}}$$

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

DANTE CULACIATI

$$= \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{5-3x'-3+7y'-7+x'^2+2x'+1+3y'^2-6y'+3-x'y'+x'-y'+1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$= \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{x'^2+3y'^2-x'y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Pruebo por Sándwich que este límite existe y es 0.

$$\lim_{(x',y')\to(0,0)} \left|\frac{x'^2+3y'^2-x'y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right| \leq \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{|x'|^2+3|y'|^2+|x'y'|}{|\sqrt{x'^2+y'^2}|} \leq \left(\lim_{(x',y')\to(0,0)}\right) \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}^2+3\sqrt{x'^2+y'^2}^2+|x'^2+y'^2|}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

JUSTIFICACIÓN

- $|x'| = \sqrt{x'^2} \leq \sqrt{\underbrace{x'^2+y'^2}_{\geq 0}}$
- $|y'| = \sqrt{y'^2} \leq \sqrt{\underbrace{x'^2+y'^2}_{\geq 0}}$
- $|x'y'| \leq |x'^2+y'^2|$

Pues $0 \leq (x'-y')^2 = x'^2-2x'y'+y'^2$

$\Rightarrow x'^2-2x'y'+y'^2 \geq 0$

$\Rightarrow x'^2+y'^2 \geq 2x'y'$

$\Rightarrow |x'^2+y'^2| \geq 2|x'y'| \geq |x'y'|$

Además $|x'^2+y'^2| = x'^2+y'^2$ (Ambos ≥ 0)

Y $|\sqrt{x'^2+y'^2}| = \sqrt{x'^2+y'^2}$ (Pues en $\mathbb{R}$ la raíz siempre es positiva, y $x'^2+y'^2 \geq 0$)

$$= \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{|x'^2+y'^2|+3(x'^2+y'^2)+(x'^2+y'^2)}{(x'^2+y'^2)^{1/2}}$$

$$= \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{5(x'^2+y'^2)}{(x'^2+y'^2)^{1/2}}$$

$$= \lim_{(x',y')\to(0,0)} 5(x'^2+y'^2)^{1/2}$$

$$= 5(0^2+0^2)^{1/2} = 5\cdot 0 = \boxed{0}$$

Por lo tanto, $0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left|\frac{f(x,y)-12}{\|(x-1,y+1)\|}\right| \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y)-12}{\|(x-1,y+1)\|} \leq 0$

NOTA

(TERMINA A LA VUELTA)

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{f(x,y)-12}{\|(x-1,y+1)\|} = 0.}$$

(EJercicio 2 en la ~~otra~~ página siguiente)

NOTA

DANTE CULACIATI

HOJA N° 3

FECHA

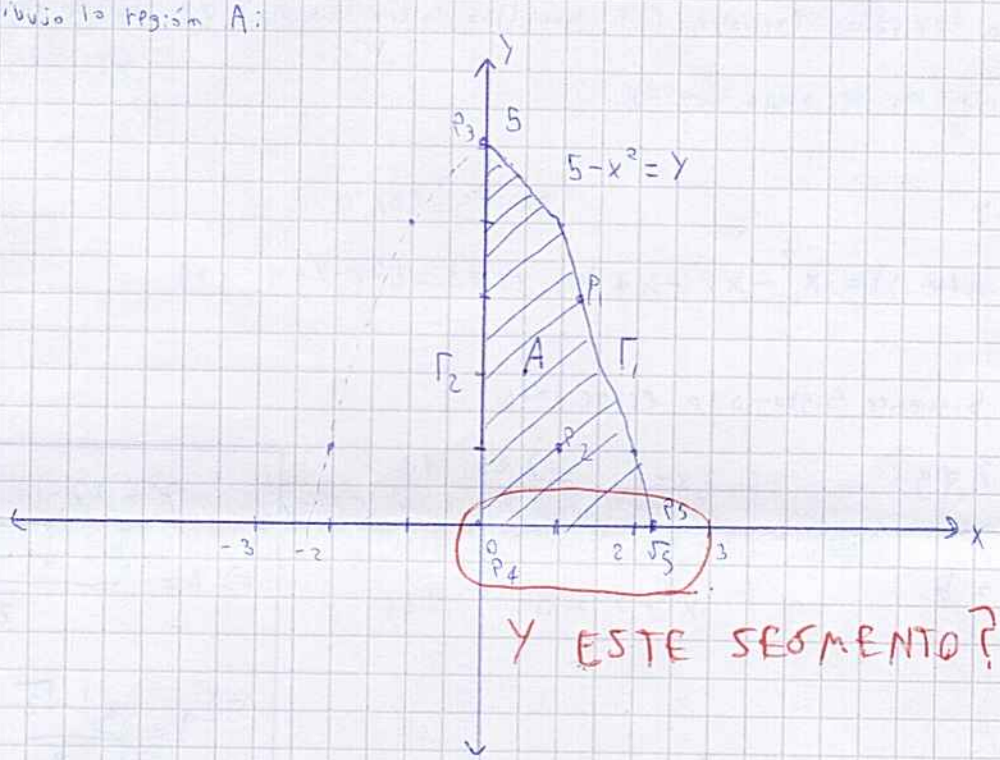
2) Quiero hallar los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x,y) = (x-1)(x-y)$$

en la región

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \sqrt{5} \ \ y \ \ 0 \leq y \leq 5 - x^2\}.$$

Primero, dibujo la región A:



Para encontrar los máximos y mínimos absolutos de f en A, busco los puntos críticos en el borde de A (llamémoslo A^o) y en el interior de A, comparo valores y el (o los) valor máximo va a ser mi máximo absoluto, y el valor mínimo va a ser mi mínimo absoluto. Esto vale porque el Teorema de Weierstrass me asegura que, si f es continua en una región A (lo es), y A es compacto (Al incluir a su borde, es cerrado, y al ser finito, es acotada, por lo que es compacto), f alcanza máximos y mínimos absolutos en A.

(SIGUE A LA VUELTA)

NOTA

Borde de A (A°)

Podemos pensar en A° como la unión de dos ~~[illegible]~~ curvas, Γ_1 (que es $5-x^2=y$) y Γ_2 (que es $x=0$)

Γ_1:

Uso ~~[illegible]~~ el método de Lagrange, tomando $g(x,y)=x^2+y$ (pues $5-x^2=y \Rightarrow 5=x^2+y$, tomo $x^2+y=5$ como restricción), $\nabla g=(2x,1)$, ~~[illegible]~~ puedo usar Lagrange porque g tanto g y f tienen derivadas parciales continuas (las calculo abajo), y ∇g no se anula en Γ_1 (En particular, no se anula nunca).

$g(x,y)=x^2+y \Rightarrow \nabla g=(2x,1)$

$f(x,y)=(x-1)(x-y)=x^2-xy-x+y \Rightarrow \nabla f=(2x-y-1,-x+1)$

Considero el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g \\ g(x,y)=5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y-1=\lambda 2x & (1) \\ -x+1=\lambda & (2) \\ x^2+y=5 & (3) \end{cases}$$

~~[illegible]~~. $-x+1=\lambda \iff \underline{x=1-\lambda}$

En (1)

$\Rightarrow 2(1-\lambda)-y-1=\lambda 2(1-\lambda)$

$\iff 2-2\lambda-y-1=2\lambda-2\lambda^2$

$\iff 1-2\lambda-2\lambda+2\lambda^2=y$

$\iff \underline{2\lambda^2-4\lambda+1=y}$

~~[illegible]~~

En (3)

$\Rightarrow (1-\lambda)^2+(2\lambda^2-4\lambda+1)=5$

$\iff 1-2\lambda+\lambda^2+2\lambda^2-4\lambda=4$

$\iff 3\lambda^2-6\lambda=3$

$\iff 3(\lambda^2-2\lambda)=3 \iff \lambda^2-2\lambda=1$

$\iff \lambda^2-2\lambda-1=0$

$\iff \lambda=(1+\sqrt{2}) \vee \lambda=(1-\sqrt{2})$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda^2-2\lambda-1=0 \\ \Rightarrow\ &\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-(4\cdot 1\cdot(-1))}}{2} \\ \iff\ &\lambda=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2} \\ \iff\ &\lambda=\frac{\cancel{2}\pm\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\ \iff\ &\lambda=1+\sqrt{2} \vee \lambda=1-\sqrt{2} \end{aligned}}$$

NOTA

(Sigue en página 4)

HOJA Nº 4

FECHA

DANTE CULACIATI

Si $\lambda = 1+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-(1+\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \\ y = 2(1+\sqrt{2})^2 - 4(1+\sqrt{2}) + 1 = 3 \end{cases}$$

Si $\lambda = 1-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \\ y = 2(1-\sqrt{2})^2 - 4(1-\sqrt{2}) + 1 = 3 \end{cases}$$

Como en Γ_1, $x \geq 0$, me quedo con el punto

$P_1 = (\sqrt{2}, 3)$ ✓

Γ_2:

Notemos que en todo Γ_2, $x=0$, por lo que sus puntos son de la forma

$(0, y)$

Tomo $f(0,y) = (0-1)(0-y) = (-1)\cdot(-y) = y = g(y)$

Tomo $g'(y) = 1$, como $g'(y)$ no se anula nunca, no tengo puntos críticos en Γ_2.

Interior de A

Tomo $\nabla f = (2x-y-1, -x+1)$, lo igualo a 0 y me quedo con los (x,y) que están en A.

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x-y-1 = 0 & (1) \\ -x+1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$-x+1 = 0 \iff \underline{x=1} \overset{\text{En }(1)}{\Rightarrow} 2-y-1=0 \iff \underline{y=1}$$

obtengo el punto $(1,1)$, que existe en A pues $0 \leq 1 \leq \sqrt{5}$ $\wedge$ $0 \leq 1 \leq (5-1) = 4$

$P_2 = (1,1)$ ✓

NOTA

Considero también las intersecciones entre Γ_1 y Γ_2, que son los puntos

$P_3 = (0, 5)$

$P_4 = (0, 0)$ Pues ~~es~~ estos puntos son puntos críticos bajo las condiciones

$P_5 = (\sqrt{5}, 0)$ dadas

Evalúo f en cada punto.

$P_1 = (\sqrt{2}, 3)$ $P_2 = (1, 1)$ $P_3 = (0, 5)$ $P_4 = (0, 0)$ $P_5 = (\sqrt{5}, 0)$ FALTA EL OTRO SEGMENTO

- $f(\sqrt{2}, 3) = 5 - 4\sqrt{2} \approx -0,65 \Rightarrow (\sqrt{2}, 3)$ es mínimo absoluto de f (en A).

- $f(1,1) = 0$

- $f(0, 5) = 5 \Rightarrow (0, 5)$ es máximo absoluto de f (en A).

- $f(0,0) = 0$

- $f(\sqrt{5}, 0) = 5 - \sqrt{5} \approx 2,76$

(Ejercicio 3 en la página siguiente)

NOTA

DANTE CULACIATI

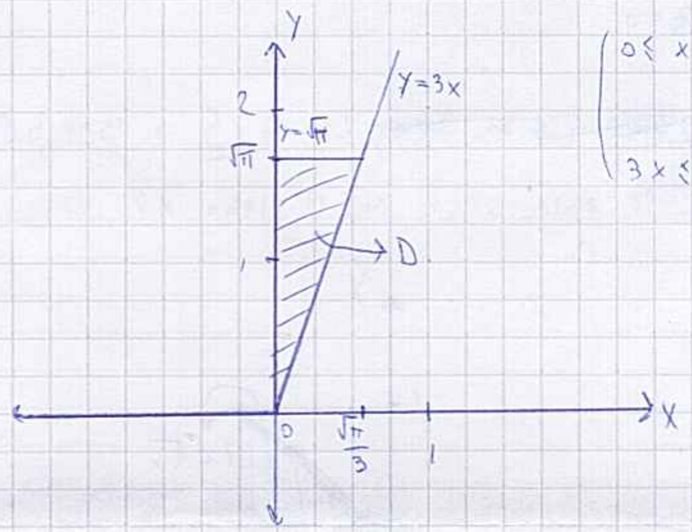
HOJA N° 5

FECHA

3) a) Quiero calcular

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/3} \int_{3x}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$$

Primero, grafico la región de integración (llamémosla D)



$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{\pi}}{3} \\ 3x \leq y \leq \sqrt{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ \Rightarrow x = \frac{y}{3} \end{cases}$$

Puedo considerar ~~a~~ también a D como:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{\pi} \\ 0 \leq x \leq \frac{y}{3} \end{cases}$$

$u(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}^2 = \pi$

$u(0) = 0^2 = 0$

Entonces ~~[illegible]~~

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/3} \int_{3x}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/3} \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2) \Big[x \Big]_{x=0}^{x=y/3} dy = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\, y\, dy$$

Hago una sustitución $\overbrace{u = y^2}^{u(y)} \Rightarrow \frac{du}{dy} = 2y \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{du}{y} = dy$

Entonces $\frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(y^2)\, y\, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi})} \operatorname{sen}(u) \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}}\, du = \frac{1}{6} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u)\, du$

NOTA

(Termino a la vuelta)

Dante Culacciati

HOJA N° 6

FECHA

Finalmente, considero la integral siguiente:

$$\text{Volumen}(S) = \iiint_S 1 \, dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1-y} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \left[z \right]_{z=0}^{z=1-y} dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 1 - y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} - \frac{x}{2} \, dx = \left[x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

(Ejercicio 4 en página siguiente)

NOTA

DANTE CULACIATI

HOJA N° 7

FECHA

4| Quiero calcular

$$\iiint_W \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV$$

donde $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{2} \right\}$

observo que sería más fácil calcular esta integral si trabajase con coordenadas esféricas.

paso a coordenadas esféricas de la siguiente manera:

- $x = \rho \sin\phi \cos\theta$
- $y = \rho \sin\phi \sin\theta$
- $z = \rho \cos\phi$
- $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$
- $\left| \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} \right| = \rho^2 \sin\phi$
- $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$

~~Entonces la integral nos queda:~~

W nos queda:

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 \leq 4 ,\ \rho\cos\phi = \sqrt{2} \right\}$$

(SIGUE A LA VUELTA)

NOTA

Notamos que $\rho^2 \leq 4 \iff -2 \leq \rho \leq 2$. (Como ρ es la distancia entre un punto de la esfera y el centro de la esfera, siempre es positivo (ρ nulo)).

$\Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2$

Además, $\rho\cos\phi = \sqrt{2}$

Si $(\rho \neq 0) \Longrightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\rho}\right)$,

(Si $\rho = 0$, $\phi = \sqrt{2}$ (ABSU))

($\rho = 0 \Rightarrow$ el punto es el $(0,0,0)$)

ASUMO ESTA CONVENCIÓN

Como ρ va entre 0 y 2, ϕ va entre 0 y $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

No hay restricciones para θ, por lo que θ va entre 0 y 2π.

Finalmente tengo que

NO

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \sqrt{2} \leq \rho \leq 2\right\}$$ (*) (JUSTIFICO EN ~~A LA~~ LA OTRA PÁGINA)

Entonces, la integral nos queda

$$\iiint_W \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\rho^4}\cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin\phi\, d\phi \cdot \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = -\left[\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} \cdot \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cdot \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right]\cdot 2\pi \cdot \int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{\rho^2}\, d\rho = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{6} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{6} = \boxed{\frac{\pi(4-3\sqrt{2})}{6}}$$

$\approx -0{,}127$

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = \left[\frac{\rho}{\rho^2}\right]_{\sqrt{2}}^{2} - 2\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\rho}{\rho^3} \Rightarrow 3\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = \left[\frac{1}{\rho}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

NO

$$\iff \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = \frac{1-\sqrt{2}}{6}$$

Integro por partes

$u = \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow \frac{du}{d\rho} = -2\,\frac{1}{\rho^3}$

NOTA $v = 1 \Rightarrow dv = d\rho$

DANTE CULACIATI

HOJA Nº 8

FECHA

(Justificación)

4) $\rho^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2$ (Pues ρ siempre es positivo).

Además, $z = \rho \cos \phi = \sqrt{2}$

$(\rho \neq 0)$ $\Rightarrow \cos \phi = \dfrac{\sqrt{2}}{\rho}$ pero ρ no puede ser 0.

El valor máximo de ϕ es $\arccos\left(\underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

(valor máximo de ρ)

El valor mínimo de ϕ es 0. Entonces

$$z = \rho \cos(0) = \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}$ (valor mínimo de ρ)

~~Luego,~~

θ no tiene restricciones, entonces va entre 0 y 2π

Finalmente, nos queda

$$0 \leq \phi \leq \pi/4$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$\sqrt{2} \leq \rho \leq 2$$

(Y de acá sale W

NOTA