1	2	3	4	5	CALIF.
B	B	B	B	B	A

¡MUY BIEN!!

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA:

HOJAS ENTREGADAS: 7

TURNO: ☒ Ma-Ju 14-17 hs ☐ Ma-Ju 19-22 hs

Probabilidades y Estadística (C)

Segundo Cuatrimestre de 2014 - Segundo Parcial

25/11/2014

---

1. Una fábrica produce paquetes de harina cuyo peso (en kilos) es una v.a. con media 1 y varianza 0,02.

   a) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que 20 paquetes pesen más de 21 kg.

   b) Hallar $n \geq 1$ de manera que si $\{X_i\}_{i\geq 1}$ denotan los pesos de paquetes de harina producidos en forma independiente, $P(|\sum_{i=1}^{n} X_i - n| \geq 0,1n) \leq 0,05$.

   c) ¿Cuántos paquetes serán necesarios para garantizar que un pedido de 300kg. sea satisfecho con probabilidad mayor o igual que 0,95?

2. Una casa tiene dos puertas. Una trasera y otra que da a la calle. El dueño sale a correr cada mañana y puede salir y entrar de su casa con la misma probabilidad por cualquiera de las dos puertas. Para correr, el dueño tiene 2 pares de zapatillas que deja en la puerta por la que entra luego de correr (sea cual sea esa puerta). Cuando sale a correr, si no hay zapatillas en la puerta el corredor sale descalzo.

   a) Sea X_i la cantidad de pares de zapatillas que se encuentran en la puerta que da a la calle en el día i. Si $X_0 = 1$, calcular las probabilidades puntuales de X_1.

   b) Dar la matriz de transición para el proceso de Markov correspondiente a la variable X_i.

   c) Hallar un vector de probabilidad que resulte invariante para dicho proceso.

3. Considere una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ con distribución,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} & x \geq \theta \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

   para $\lambda > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

   a) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ y λ.

   b) Se hicieron las siguientes 10 mediciones

   3,11 0,64 2,55 2,2 5,44 3,42 10,39 8,93 17,82 1,3.

   Calcular los estimadores de θ y λ.

(SIGUE AL DORSO)

4. Las máscaras de bomberos deben soportar altas temperaturas, entre 90° y 250° grados. En una prueba en 55 máscaras, 11 se rompieron a los 120°.

   a) Construir un intervalo de confianza asintótico de nivel 90 % para la proporción p de máscaras que se rompen a los 120°.

   b) ¿Qué tamaño de muestra se debe tomar si se quiere obtener un intervalo de longitud a lo sumo 0,1, suponiendo que se obtenga la misma proporción $1/5$ de máscaras rotas?

   NO HACER → *c*) Contruir el test bilateral de nivel 0, 1 asociado al intervalo de confianza hallado en a). Identificar las hipótesis, el estadístico y la región de rechazo.

5. Para un cierto compuesto químico, se quiere saber si al disolver ese compuesto en agua, aumenta el punto de ebullición del agua. Se sabe que el punto de ebullición del agua pura medido en el laboratorio tiene una distribución normal con media 100°C.

   Se realiza una muestra en 25 botellas de agua en las que se disuelve el compuesto, obteniendo un valor promedio para el punto de ebullición $\overline{X} = 101{,}5$°C y un desvío estándar muestral de 5°C.

   a) Hacer un test para decidir si disolver el compuesto hace aumentar el punto de ebullición, tal que la probabilidad de concluir que aumenta cuando en realidad no lo hace sea menor o igual al 5 %.
   Identifique las hipótesis a testear, el estadístico utilizado, su distribución bajo la hipótesis nula y la región de rechazo.

   b) ¿Qué conclusión obtiene mediante el test para los valores de la muestra?

   c) Suponiendo que el punto de ebullición real al disolver el compuesto pasa a ser de 104°, acotar la probabilidad de cometer un error de tipo II mediante el test.

1. H: Peso en Kg del paquete de harina

$E(H) = 1 \quad Var(H) = 0.02$

H_i: Peso en Kg del i-ésimo paquete $\sim H$

a) $H_1, \ldots, H_n$ m.a. , $E(H_i) < \infty$, $Var(H_i) < \infty$

Por el TCL,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} H_i - n * E(H)}{\sqrt{n * Var(H)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} H_i > 21\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20*1}{\sqrt{0.02*20}} > \frac{21 - 20*1}{\sqrt{20*0.02}}\right)$$

$$\overset{TCL}{\simeq} 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 1 - \phi(1.58) = 1 - 0.9429$$

$= 0.0571$

b) Sea X v.a $/ E(X), Var(X) < \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Tchebyshev

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right| \geq 0.1n\right) \leq \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{(0.1n)^2}$$

$$= \frac{\cancel{n} * 0.02}{(0.1)^2 * n^{\cancel{2}}} = \frac{2}{n} \leq 0.05$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{2}{0.05}$$

$$n \geq 40$$

$$\boxed{n = 40}$$

c) $$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 300\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n*1 > \underbrace{300-n}_{-a_n}\right)$$

Supongo $300 - n < 0$

$n > 300$

2/7

Tchebyshev

$$\underset{1}{\geq} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right| < a_n\right) \geq 1 - \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{a_n^2}$$

$$\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right| < a_n\right\} \subseteq \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i - n > -a_n\right\}$$

$$= 1 - \frac{n * 0.02}{(300-n)^2} \geq 0.95$$

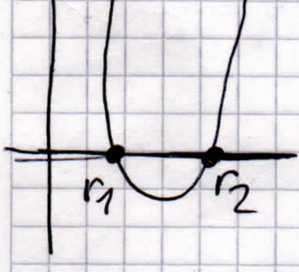
$$\iff 0.05(300-n)^2 \geq n * 0.02$$

$$2.5(n^2 - 600n + 300^2) \geq n$$

$$2.5n^2 - 1501n + 225000 \geq 0$$

$$\frac{1501 \pm \sqrt{(1501)^2 - 4 * 2.5 * 225000}}{2 * 2.5}$$

$$\frac{1501 \pm \sqrt{3001}}{5} \begin{cases} r_1 = 289.24 \\ r_2 = 311.15 \end{cases}$$



$n \geq 312$

$n = 312$ Alcanza

2.

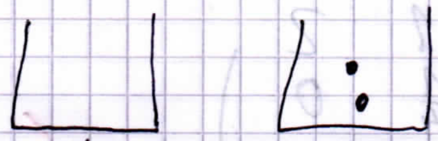
a) y b)

Las columnas hacen referencia al día n y las filas al día n+1 (~~...~~ versión Santiago)

A: Adenlate
T: Trasera

~~Columna~~

Columna 0 (2 pares en la puerta trasera)



A T

~~• 0 pares en A al día siguiente~~

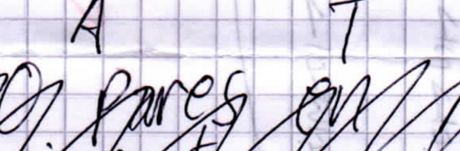
$X \longrightarrow Y$ es salir de X y volver por Y

$$P_{00} = \overset{T \to T}{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}} + \overset{A \to A}{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}} + \overset{A \to T}{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$P_{01} = \overset{T \to A}{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$P_{02} = 0$$

Columna 1

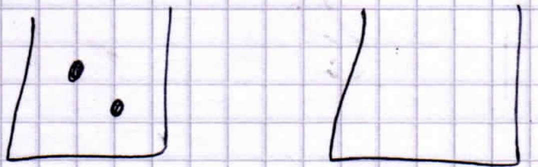


A T

$$P_{10} = \overset{A \to T}{\frac{1}{4}} \qquad P_{11} = \overset{A \to A}{\frac{1}{4}} + \overset{T \to T}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad P_{12} = \overset{T \to A}{\frac{1}{4}}$$

NOTA

Columna 2



A T

$$P_{20} = 0 \qquad P_{21} = \overset{A \to T}{\frac{1}{4}}$$

$$P_{22} = \overset{A \to A}{\frac{1}{4}} + \overset{T \to T}{\frac{1}{4}} + \overset{T \to A}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c) Busco $p^{(\infty)} / P p^{(\infty)} = p(\infty)$

$$(P - Id)\, p^{(\infty)} = 0 \qquad p^{(\infty)} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

2

4/7

$$P - Id = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \leftarrow \frac{1}{4} F_1 \\ F_2 \leftarrow \frac{1}{4} F_2 \\ F_3 \leftarrow \frac{1}{4} F_3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} F_2 \leftarrow F_1 + F_2$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_3 \leftarrow F_2 + F_3$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 & \Longleftrightarrow \quad v_1 = v_2 \\ \quad -v_2 + v_3 = 0 & \Longleftrightarrow \quad v_3 = v_2 \end{cases}$$

Pido que $\sum_{i=1}^{3} v_i = 1$

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_2 + v_2 + v_2 = 1$$

$$v_2 = \frac{1}{3}$$

$$p(\infty) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

HOJA Nº

FECHA 5/7

3.

a) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(x_i-\theta)} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)$

$= \lambda^n e^{\lambda\theta n} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)}_{\oplus}$

$\oplus = \begin{cases} 1 & \forall i, 1\leq i\leq n, x_i \geq \theta \\ 0 & cc \end{cases}$

$= \min_{1\leq i\leq n}(x_i) \geq \theta$

$\hat{\theta}_{MV} = \min_{1\leq i\leq n}(x_i)$

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(x_i-\theta)} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)$

$= \lambda^n e^{\lambda\theta n} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}$

NOTA

$$\ln(L(\lambda)) = n\ln\lambda + \lambda\theta n - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$(\ln(L(\lambda)))' = \frac{n}{\lambda} + \theta n - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

~~θ lo reemplazo~~

$$n\left(\frac{1}{\lambda} + \theta\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

reemplazo θ por el $\hat{\theta}_{MV}$

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{1}{\overline{X}_n - \min_{1\leq i\leq n}(X_i)}$$

b) $\tilde{\theta} = \min_{1\leq i\leq 10}(x_i) = 0.64$ $\quad \overline{x}_{10} = 5.58$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}_{10} - \min_{1\leq i\leq 10}(x_i)} = \frac{1}{5.58 - 0.64} = \frac{50}{247}$$

Nota $\sim$: Notación que es como el estimador en base a la muestra

6/7

4. $\bar{x}_{55} = \frac{1}{5}$

$1-\alpha = 0.9$

$\alpha = 0.1$

$X_i \sim Be\left(\frac{1}{5}\right)$

$\sum_{i=1}^{55} X_i \sim Bi\left(55, \frac{1}{5}\right)$

$X_1, \dots, X_n$ iid $\quad X_i \sim Be\left(\frac{1}{5}\right) = X$

$E(X) = \frac{1}{5} < \infty$

$Var(X) = \frac{1}{5} * \frac{4}{5} < \infty$

Por el TCL

$$\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

en el denominador pongo $\bar{x}_n$ en donde está p ($\bar{x}_n$ es un estimador insesgado p)

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\right)$$

$\simeq 1-\alpha = 0.9$

$$IC_{1-\alpha\ aprox}(p) = \left[\frac{1}{5} - 1.64\frac{\sqrt{\frac{1}{5}*\frac{4}{5}}}{\sqrt{55}}, \frac{1}{5} + 1.64\frac{\sqrt{\frac{1}{5}*\frac{4}{5}}}{\sqrt{55}}\right]$$

$$= [\cancel{0.2884}\ 0.1115, 0.2884]$$

b) $L = \bar{X}_n + 1.64\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} - \left(\bar{X}_n - \cancel{1.64}\right.$

$$\left.1.64\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\right) = 2 * 1.64\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}$$

$\bar{X}_n = \frac{1}{5}$

$$= 2 * 1.64\frac{\sqrt{\frac{1}{4}*\frac{4}{5}}}{\sqrt{n}} = 1.312\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.1$$

$$\iff \sqrt{n} \geq 13.12$$

$$n \geq 172.1344$$

$$n = 173$$

7/7

5. $n=25$, $\bar{x}_{25} = 101.5$, $s=5$, $P(\text{Error tipo 1}) = 0.05$

a) $H_0: \mu = 100$ vs $H_1: \mu > 100$

$$T = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{S}$$

Bajo H_0, $\mu = 100$: $\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - 100)}{S} \sim t_{n-1}$

Región de rechazo $= [t_{25-1,0.05}, +\infty)$

$= [1.7109, +\infty)$

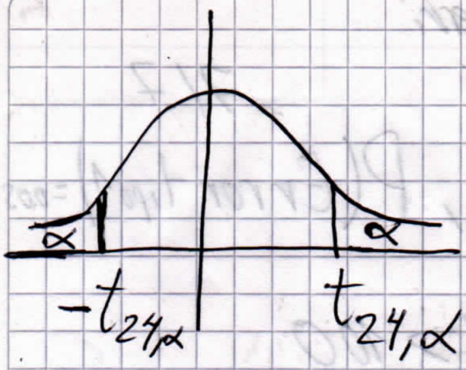
b) $T_{obs} = \sqrt{25}\,\frac{101.5-100}{5} = 1.5 \overset{?}{\ngeq} 1.7109$

No rechazo H_0

c) $P^{\mu=104}\left(\sqrt{25}\,\frac{\bar{X}_n - 100}{5} < 1.7109\right)$

$= P^{\mu=104}\left(\bar{X}_n - 104 < 1.7109 + 100 - 104\right)$

$= P^{\mu=104}\left(\bar{X}_n - 104 < -2.2891\right)$



~~Busco un β~~

Hay un β / $-t_{24,0.01} < -t_{24,\beta} < -t_{24,0.025}$

$$-2.4922 < -t_{24,\beta} < -2.0639$$

$-t_{24,0.01}$ acumula 0.01 a izq

$-t_{24,0.025}$ " 0.025 " "

(gráfico de arriba)

Luego $P^{\mu=104}(\text{Error tipo II}) = E\,II$

cumple $0.01 < E\,II < 0.025$