Resuelto del Segundo Recuperatorio del Segundo Parcial

Ejercicio 1:
Determinar para cada $n \in \mathbb{N}$ el resto de dividir a 7^{5^n-1} por 13.

En principio sabemos que, como 13 es primo y $(7:13)=1$, el Pequeño Teorema de Fermat nos dice que $7^{12} \equiv 1\ (13)$

Así, como $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists!\ q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $r \in \{0,1,\dots,12\}$ / $k = 12q + r$ (alg. de división) y $7^k = (7^{12})^q . 7^r \equiv 7^r\ (13)$, nos alcanza estudiar $r_{12}(5^n-1)$ $(\star)$

Ahora bien, si llamamos $r = r_{12}(5^n-1)$, como $12 = 3.4$ y $(3:4)=1$ sabemos que $r = r_{12}(5^n-1) \iff 5^n-1 \equiv r\ (12) \iff \begin{cases} 5^n-1 \equiv r\ (3) \\ 5^n-1 \equiv r\ (4) \end{cases}$

Estudiemos cada una de estas congruencias:

- $5^n-1 \equiv r(3)$: Como $5^n-1 \underset{5\equiv -1(3)}{\equiv} (-1)^n-1\ (3)$, podemos observar que si n es par, $(-1)^n-1 \equiv 1-1 \equiv 0\ (3)$ y si n impar, $(-1)^n-1 \equiv -1-1 \equiv 1\ (3)$
  Así $r \equiv \begin{cases} 0\ (3) & \text{si } n \text{ par} \\ 1\ (3) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$
- $5^n-1 \equiv r(4)$: Como $5^n-1 \underset{5\equiv 1(4)}{\equiv} 1^n-1 \equiv 0\ (4)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $r \equiv 0\ (4)\ \forall n \in \mathbb{N}$

De esa forma vimos que

$\ast$ Si n par, $\begin{cases} r \equiv 0\ (3) \\ r \equiv 0\ (4) \end{cases} \iff \begin{matrix} 3 \mid r \\ 4 \mid r \end{matrix} \underset{(3:4)=1}{\iff} 12 \mid r \iff r \equiv 0\ (12) \underset{r \in \{0,1,\dots,11\}}{\iff} r = 0$

$\ast$ Si n impar, $\begin{cases} r \equiv 1\ (3) \\ r \equiv 0\ (4) \end{cases}$ por TChR $\exists!\ r \in \{0,1,\dots,11\}$ solución del sistema
$r = 4j \equiv 1\ (3)$ $(j \in \mathbb{Z})$
$\iff j \equiv 1\ (3) \iff r = 4(3s+1) = 12s+4 \quad s \in \mathbb{Z}$

pero como $r \in \{0,1,\dots,11\}$, $r = 4$

Vimos hasta acá que si n par, $5^n-1 \equiv 0\ (12)$ ★ y
si n impar, $5^n-1 \equiv 4\ (12)$ ★.

¿Qué nos dice esto en el problema original?

Si $n \in \mathbb{N}$ par, vía ★ tenemos $7^{5^n-1} \equiv 7^{r_{12}(5^n-1)}\ (13)$. En ★ vimos $r_{12}(5^n-1) = 0$ con lo cual $7^{5^n-1} \equiv 7^0 \equiv 1\ (13)\ \forall n$ par.

Si $n \in \mathbb{N}$ impar, vía ★ nuevamente $7^{5^n-1} \equiv 7^{r_{12}(5^n-1)}\ (13)$. Como en ★ vimos $r_{12}(5^n-1) = 4$, $7^{5^n-1} \equiv 7^4 \equiv 9\ (13)\ \forall n$ impar

Respuesta: $r_{13}(7^{5^n-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ par} \\ 9 & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ impar} \end{cases}$

Ejercicio 2:
Sea ω una raíz 26-ava primitiva de la unidad. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\omega^{12k-20} = \overline{\omega}^{4k+12}.$$

En primer lugar, como $\omega \in G_{26}$, $\overline{\omega} = \omega^{-1}$ con lo cual reescribimos la igualdad como: $\omega^{12k-20} = \omega^{-4k-12}$

Multiplicando por ω^{4k+12} de cada lado (como $\omega^{26}=1 \Rightarrow \omega \neq 0$) esto es equivalente a: $\omega^{12k-20+4k+12} = 1$

y esto sucede si y sólo si: $\omega^{16k-8} = 1$

Ahora bien, sabemos que ω no sólo es una raíz 26-ava de la unidad, pero es primitiva. Esto nos dice que

$$\begin{aligned}
\omega^{16k-8} = 1 &\iff 26 \mid 16k-8 \\
&\iff 16k-8 \equiv 0 \ (26) \\
&\iff 16k \equiv 8 \ (26) \\
\text{Como } (16:26)=2 \text{ y } 2 \mid 8, \text{ podemos simplificarlo} &\iff 8k \equiv 4 \ (13) \\
\text{o lo que es igual} &\iff 4.2k \equiv 4.1 \ (13) \\
\text{Como } (4:13)=1, \text{ simplificamos} &\iff 2k \equiv 1 \ (13) \\
\text{Como } (7:13)=1, \text{ multiplicamos por } 7 &\iff 14k \equiv 7 \ (13) \\
\text{o lo que es igual} &\iff k \equiv 7 \ (13)
\end{aligned}$$

Como todos nuestros pasos fueron equivalencias, podemos afirmar que si ω es una raíz 26-ava primitiva de la unidad,

$$\omega^{12k-20} = \overline{\omega}^{4k+12} \iff k \in \mathbb{Z} / k \equiv 7 \ (13)$$

Ejercicio 3:
Determinar todas las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio

$$f = X^4 - (i+4)X^3 + (8+4i)X^2 - (2i+24)X + 12 \ \in \ \mathbb{C}[X]$$

sabiendo que tiene al menos una raíz real.

Aquí usamos lo siguiente: Consideremos $a \in \mathbb{R}$ raíz de f (sabemos $\exists$ al menos 1): $0 = f(a) = a^4 - (i+4)a^3 + (8+4i)a^2 - (2i+24)a + 12$

Como $a \in \mathbb{R}$, vale que $= \underbrace{(a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12)}_{c \in \mathbb{R}} + i\underbrace{(-a^3 + 4a^2 - 2a)}_{d \in \mathbb{R}}$

Ahora bien, $0 = c + di$ con $c, d \in \mathbb{R} \iff c = 0$ y $d = 0$

Estudiemos primero $g(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x$, para el cual $g(a) = d = 0$

$$g(x) = -x(x^2 - 4x + 2) = -x(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$$

resolvente: raíces $= \frac{4 \pm \Delta}{2}$, $\Delta^2 = 2$

Es decir que nuestras opciones para a son $0, 2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$

Miremos ahora $h(x)=x^4-4x^3+8x^2-24x+12$ para el cual $h(a)=c=0$
Como $h(0)=12\neq 0$, $a\neq 0$. Luego $a=2+\sqrt{2}$ o bien $a=2-\sqrt{2}$.

Pero observemos que $h\in\mathbb{Q}[x]$, con lo cual $2+\sqrt{2}$ es raíz de $h \Leftrightarrow$ $2-\sqrt{2}$ lo es $\Leftrightarrow$ como $(x-2-\sqrt{2}:x-2+\sqrt{2})=1$, $(x-2-\sqrt{2}).(x-2+\sqrt{2})\mid h(x)$ ⋆
Más aún, como ya sabemos $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})=x^2-4x+2\mid g(x)$,
⋆ sucede si y sólo si $x^2-4x+2\mid f(x)$. Verifiquemoslo:

$$\begin{array}{l|l}
x^4-(i+4)x^3+(8+4i)x^2-(2i+24)x+12 & x^2-4x+2 \\
\hline
-\ \ x^4-4x^3+2x^2 & x^2-ix+6 \\
\quad -ix^3+(6+4i)x^2-(2i+24)x+12 & \\
-\ \ -ix^3+4ix^2-2ix & \\
\quad\quad 6x^2+24x+12 & \\
-\ \ 6x^2-24x+12 & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

Así, $f=(x^2-4x+2)(x^2-ix+6)=(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})(x^2-ix+6)$
Busquemos las raíces de x^2-ix+6. Vimos son de la forma
raíces $=\frac{i+\Delta}{2}$ con $\underbrace{\Delta^2=-25}_{\Delta=\pm 5i}$ luego las raíces son $-2i$ y $3i$

Así, $f=(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})(x+2i)(x-3i)$ y
las raíces de f son $2\pm\sqrt{2}$, $-2i$ y $3i$ (todas raíces simples)

Ejercicio 4:

(a) Determinar todos los $a\in\mathbb{Q}$ para los cuales 2 es raíz múltiple del polinomio

$$f=aX^5+8X^4-26X^3+44X^2-40X-(32a+16)\ \in\ \mathbb{Q}[X]$$

(b) Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio obtenido en producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Estudiemos en primer lugar el inciso a.
Sabemos que 2 es raíz múltiple de $f \Leftrightarrow f(2)=0$ y $f'(2)=0$.
Hallemos los $a\in\mathbb{Q}$ para los cuales eso sucede:
$*$ Como $f(2)=a.2^5+8.2^4-26.2^3+44.2^2-40.2-32a-16$
$=\cancel{32a}+128-208+176-80-\cancel{32a}-16=0$
tenemos que $f(2)=0\ \forall a\in\mathbb{Q}$. Es decir, 2 es raíz de $f\ \forall a\in\mathbb{Q}$
$*$ Como $f'(x)=5ax^4+32x^3-78x^2+88x-40$,
$f'(2)=80a+256-312+176-40=80a+80=80(a+1)$
tenemos entonces que $f'(2)=0 \Leftrightarrow 80(a+1)=0 \Leftrightarrow a=-1$

Como $a=-1$ es el único racional que cumple $f(2)=f'(2)=0$, 2 es raíz múltiple de $f \iff a=-1$.

Para el inciso b debemos tomar $a=1$. Como tenemos que factorizar f nos preguntamos sobre ese 2 raíz múltiple de f:

¿Con qué multiplicidad lo es? $a=-1$

Veamos si 2 es raíz de $f''(x)=-20x^3+96x^2-156x+88$:

$f''(2)=-160+384-312+88=0$ con lo cual es raíz al menos triple

¿será 2 también raíz de $f'''(x)=-60x^2+192x-156$?

$f'''(2)=-240+384-156=-12\neq 0$

Como 2 es raíz de f, f', f'' pero no de f''', es raíz triple de f

Entonces $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8 \mid f$. Hallemos ese cociente:

$$
\begin{array}{l|l}
-x^5+8x^4-26x^3+44x^2-40x+16 & x^3-6x^2+12x-8 \\
\underline{-x^5+6x^4-12x^3+8x^2} & -x^2+2x-2 \\
\quad 2x^4-14x^3+36x^2-40x+16 & \\
- \ \underline{2x^4-12x^3+24x^2-16x} & \\
\qquad -2x^3+12x^2-24x+16 & \\
\qquad \underline{-2x^3+12x^2-24x+16} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

y $-x^2+2x-2=-(x^2-2x+2)$

Así, $f=-(x-2)^3(x^2-2x+2)$

Busquemos las raíces de x^2-2x+2

raíces: $\frac{2+\Delta}{2}$ con $\Delta^2=-4$ $(\Delta=\pm 2i)$

Luego las raíces son $1\pm i$

De esta manera:

- $f=-(x-2)^3(x-1-i)(x-1+i)$ es la descomposición de f en irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ pues todos los factores tienen grado 1
- $f=-(x-2)^3(x^2-2x+2)$ es la descomposición de f en irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ pues $(x-2)$ es un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ de grado 1 y (x^2-2x+2) es un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ de grado 2 sin raíces en $\mathbb{R}$ (reales).
- $f=-(x-2)^3(x^2-2x+2)$ es también la descomposición de f en irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ pues $(x-2)$ es un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 1 y (x^2-2x+2) es un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 2 sin raíces en $\mathbb{Q}$ (racionales).