

TEMA 3

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
R	B	B	B	9

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

1. Sea  $C$  la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + z^2 - 4x + 2z = 11, \quad y + z = 3.$$

(a) Dar una parametrización de  $C$ .

(b) Hallar todos los puntos de  $C$  cuyas rectas tangentes sean perpendiculares al plano dado por  $x = 4$ .

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{xy - 4y}{2(x-4)^2 + y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{4 \operatorname{sen}((y-3)^2) \ln(1+x)}{x^2 + (y-3)^2}$

3. Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^4 + 3y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de  $f$  en el punto  $(0, 0)$ .

(b) Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ .

4. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que su plano tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(4, -1, f(4, -1))$  es

$$-5x + y - z = 7.$$

Sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(s, t) = (t^2 e^s + t^2 + 2, 2s + s^4 - 1 - \operatorname{sen}(t)s^2)$ .

Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de  $f \circ g$  en  $(0, 1, f \circ g(0, 1))$ .

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

ejercicio 1:

(A)  $x^2 + z^2 - 4x + 2z = 11$  y  $y + z = 3$  de ese despejo  $z$   
(  $z = 3 - y$  )

$$x^2 + (3-y)^2 - 4x + 2(3-y) = 11$$
$$x^2 + (3-y)^2 - 4x + 6 - 2y = 11$$

$$x^2 + (3-y)^2 - 4x - 2y = 5$$
$$(x-2)^2 - 4 + (3-y)^2 - 2y = 5$$

$$(x-2)^2 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 2y = 5$$

$$(x-2)^2 - 4 + y^2 - 8y + 9 = 5$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 + 9 = 5$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 + 4 - 9 + 16$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16 \rightarrow \text{ahora llegué a algo que si se para metrizar}$$

lo puedo reescribir como

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

por lo tanto  $x = 4 \cos \theta + 2$   
 $y = 4 \sin \theta + 4$

para conseguir  $z$  reemplazo  $y$  en  $z = 3 - y$

$$z = 3 - (4 \sin \theta + 4)$$
$$z = -4 \sin \theta - 1$$

entonces una parametrización de  $C$  sería

$$C = \left\{ (4 \cos \theta + 2, 4 \sin \theta + 4, -4 \sin \theta - 1), \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

b) cualquier punto del plano  $x=4$  puede escribirse como  $(4, y, z)$

~~necesito que el vector de la recta tangente en el punto~~  
~~sea paralelo a la normal en  $(4, y, z)$~~

el vector director exacto de la recta tangente en cualquier punto lo consigo derivando  $C$ .

$$C'(\theta) = \{(-4 \sin \theta, 4 \cos \theta, -4 \cos \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$$

~~$$(-4 \sin \theta, 4 \cos \theta, -4 \cos \theta) \cdot (4, 4, 2) = 0$$~~
~~$$(-4 \sin \theta) \cdot 4 + (4 \cos \theta) \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cos \theta = 0$$~~

Una recta es perpendicular a un plano cuando sus vectores directores son ~~perpendiculares~~ paralelos entre si.

$$(-4 \sin \theta, 4 \cos \theta, -4 \cos \theta) = (4, 4, 2)$$

$$-4 \sin \theta = 4 \quad \text{pero } \sin \theta \in [-1, 1]$$

$$\sin \theta = -1 \quad \text{pero cuando } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

entonces un plano que cumple que su recta tangente sea perpendicular al plano  $x=4$  es

$$C\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (4 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 2, 4 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 4, -4 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 1)$$

$$C\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (2, 0, 3)$$

no

?

¿a qui le referi?

Ejercicio 2:

$$2) \lim_{xy \rightarrow (4,0)} \frac{xy - 4y}{2(x-4)^2 + y^2}$$

veo cuanto dan con límites iterados.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy - 4y}{2(x-4)^2 + y^2} = \frac{0}{2(x-4)^2} \right) = 0$$

como los iterados dan a, si el límite existe debe ser a.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 4} \frac{xy - 4y}{2(x-4)^2 + y^2} = \frac{4y - 4y}{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Pruebo intersecarlo con curvas que pasen por el punto (4,0)

$$y = (x-4) \text{ pasa por } (4,0) \text{ cuando } x=4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4) - 4(x-4)}{2(x-4)^2 + (x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-4)}{3(x-4)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2}{3(x-4)^2} = \frac{1}{3}$$

como encontré una curva que hace que el límite tenga como resultado algo distinto a a, entonces el límite no existe.

$$b) \lim_{xy \rightarrow (0,3)} \frac{4 \operatorname{sen}((y-3)^2) \cdot \ln(x+1)}{x^2 + (y-3)^2}$$

Pruebo veo los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 3} \frac{4 \operatorname{sen}((y-3)^2) \cdot \ln(x+1)}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{0}{x^2} \right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 3} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{sen}((y-3)^2) \cdot \ln(x+1)}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{0}{(y-3)^2} \right) = 0$$

como los límites iterados dan a, si el límite existe debe ser a.

~~Pruebo intersecarlo con curvas que pasen por el punto (0,3)~~

$$~~x = y - 3 \text{ pasa por } (0,3) \text{ cuando } y=3~~$$

$$~~\lim_{y \rightarrow 3} \frac{4 \operatorname{sen}((y-3)^2) \cdot \ln(y-2)}{(y-3)^2 + (y-3)^2} = \lim_{y \rightarrow 3} \frac{4 \operatorname{sen}((y-3)^2) \cdot \ln(y-2)}{2(y-3)^2}~~$$

Por álgebra de límites, vale decir que el límite original es igual a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \ln(x+1) \cdot (y-3)^2}{x^2 + (y-3)^2} = \lim_{y \rightarrow 3} \frac{\text{sen}((y-3)^2)}{(y-3)^2}$$

este límite lo llamo A

al menos una vez simple

este límite lo conocemos y da 1 porque  $(y-3)^2 \rightarrow 0$  con  $y=3$ .

Por esto, en vez de solo tener que ver la existencia del límite A

si no vale el límite A da 0.

los resuelva.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 3} \frac{4 \cdot \ln(x+1) \cdot (y-3)^2}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{0}{x^2} \right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 3} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \ln(x+1) \cdot (y-3)^2}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{0}{(y-3)^2} \right) = 0$$

si el límite a lo interseca con la curva  $x = y-3$  que pasa por el caso cuando  $y=3$ , debería dar 0.

$$\lim_{y \rightarrow 3} \frac{4 \cdot \ln(y-2) \cdot (y-3)^2}{(y-3)^2 + (y-3)^2} = \lim_{y \rightarrow 3} \frac{4 \cdot \ln(y-2) \cdot (y-3)^2}{2(y-3)^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 3} 2 \ln(y-2) = 0$$

esto tiende a 0 porque  $y-2$  tiende a 1

Suspecho que el límite A existe y es 0. intento demostrarlo con el lema del sándwich.

$$0 \leq \left| \frac{4 \cdot \ln(x+1) \cdot (y-3)^2}{x^2 + (y-3)^2} - 0 \right| = \frac{4 \cdot |\ln(x+1)| \cdot (y-3)^2}{x^2 + (y-3)^2}$$

distribuir los módulos y se los saca a los cuadrados

$$\leq 4 \cdot |\ln(x+1)| = 0 \text{ cuando } x \rightarrow 0 \text{ porque } x+1 \rightarrow 1 \text{ y el } \ln(1) \rightarrow 0.$$

para  $\frac{A}{A+B} \leq 1$

si A, B son positivos

entonces como el límite A queda encerrado por razones y por derecha entre 0, puedo decir que existe y vale 0.

Como el límite A existe y da 0, el original también existe y es 0, por álgebra de límites.

Ejercicio 3:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^4 + 3y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) me piden calcular todas las derivadas direccionales en el  $(0,0)$  si existen.

Para esto necesito generalizar las direcciones.

elija  $v = (a, b)$

donde  $v$  tiene norma 1

como  $v$  tiene norma 1 entonces  $a^2 + b^2 = 1$

Para probar que las derivadas direccionales existen, en el  $(0,0)$ , el siguiente límite debe existir.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t(a,b)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cdot a^4 \cdot t^2 \cdot b^2}{t \cdot (t^4 a^4 + 3t^6 b^6)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 \cdot a^4 \cdot b^2}{t^5 (a^4 + 3t^2 b^6)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overset{\rightarrow 0}{t} \cdot a^4 \cdot b^2}{\underset{\rightarrow 0}{a^4 + 3t^2 b^6}} = \frac{0}{a^4}$$

para todas las direcciones donde  $a$  es distinto de 0, las derivadas direccionales en el  $(0,0)$  existen y dan 0. ✓

Hay solo un vector de norma 1 donde  $a$  es igual a 0, y es  $(0, 1)$ , que coincide con la derivada parcial en  $y$  de la función.

si la derivada parcial en  $y$  existe, la función  $v = a$  tiene derivadas direccionales en cualquier dirección, en el punto  $(0,0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (0,h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h^2}{(0 + 3h^6) \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h^2}{3h^7} = 0$$

~~esto~~ vea que  $f_y(0,0) = 0$ .

por lo tanto, existen <sup>todas</sup> las derivadas direccionales en el punto  $(0,0)$  y todas son iguales a 0.

b) En todo punto  $(x,y)$  distinto de  $(0,0)$  la función es diferenciable por ser una división entre 2 funciones diferenciables.

En el  $(0,0)$  sospecho que es diferenciable porque del 3.1 sé que el gradiente de la función en  $(0,0)$  es igual a 0, por lo que cumpliría el teorema del gradiente por el vector,

$$\nabla f(0,0) \cdot (z,v) = 0 \quad \forall (z,v) \text{ de norma } 1$$

para probar que es diferenciable en el  $(0,0)$ , necesitamos que el siguiente límite exista y sea igual a 0.

$$\lim_{xy \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - [f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) + f(0,0)]}{\|(x-0, y-0)\|}$$

Como el gradiente es 0, si la función es diferenciable el plano tangente al ~~origen~~  $(0,0)$  es  $z=0$ .

resuelvo el límite

$$\lim_{xy \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + 3y^6) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

hago los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + 3y^6) \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{x^4 \cdot \sqrt{x^2}} \right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + 3y^6) \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{3y^6 \sqrt{y^2}} \right) = 0$$

como ya sospecho que es diferenciable en el  $(0,0)$  intento demostrar que el límite es 0 con el lema de Squeeze.

$$0 \leq \left| \frac{x^4 y^2}{(x^4 + 3y^6) \sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq \frac{x^4 y^2}{(x^4 + 3y^6) \sqrt{x^2 + y^2}} =$$

como cada es positivo, puedo sacar los modulos

$$\frac{x^4 y^2}{(x^4 + 3y^6) \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^2}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|}$$

$$\leq \frac{A}{A+B} \leq 1$$

si A, B positivos

$$|y| \leq \|(x,y)\|$$

$$\leq \|(x,y)\| \text{ que tiende a } 0 \text{ cuando } xy \rightarrow (0,0)$$

Como el límite existe y da 0, la función es diferenciable en el  $(0,0)$ , por lo que es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ .

Ejercicio 4:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable

Plano tangente en  $(4, -1, f(4, -1)) = z =$

$$\begin{aligned} -5x + y - z &= 7 \\ -z &= 7 + 5x - y \\ z &= -7 + -5x + y \end{aligned}$$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(st) = (\tau^2 e^s + \tau^2 + 2, 2s + 5^s - 1 - \sin(\tau) s^2)$

Quiero calcular el plano tangente de  $F \circ g$  en  $(0, 1, F \circ g(0, 1))$

Para eso necesito el gradiente de  $F \circ g$  en el  $(0, 1)$  y el valor de  $F \circ g$  en el  $(0, 1)$

Observo que  $g$  es diferenciable porque tiene funciones diferenciables en ambas coordenadas.

entonces puedo conseguir  $\nabla F \circ g(0, 1)$  usando matrices.

$$\nabla F \circ g(0, 1) = \nabla F(g(0, 1)) \cdot Df g(0, 1)$$

$$g(0, 1) = (1 + 1 + 2, 0 + 0 - 1 - 0)$$

$$g(0, 1) = (4, -1)$$

$$\nabla F(g(0, 1)) = \nabla F(4, -1)$$

y esto lo puedo obtener de la ecuación del plano.

$$z = -7 - 5x + y$$

$$F_x(4, -1) = -5 \quad \text{y} \quad F_y(4, -1) = 1$$

$$F(4, -1) = -7 - 5 \cdot 4 + (-1) = -28$$

$$\text{entonces } \nabla F(4, -1) = (-5, 1)$$

Ahora necesito el  $Df g(0, 1)$

$$g = (\tau^2 e^s + \tau^2 + 2, 2s + 5^s - 1 - \sin(\tau) s^2)$$

$$Df g(st) = \begin{pmatrix} \tau^2 e^s & 2\tau e^s + 2\tau \\ 2 + 4s^3 - 2\sin(\tau) s^2 & -\cos(\tau) s^2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$Df g(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $F \circ g(st)$  es una composición de funciones diferenciables en todo su dominio,  $F \circ g(st)$  también lo será.



$$\nabla f_{\text{og}}(0,1) = (-5, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_{\text{og}}(0,1) = (-5 + 2, -20 + 0)$$

$$\nabla f_{\text{og}}(0,1) = (-3, -20)$$

el plano tangente de  ~~$(0,1)$~~   ~~$f_{\text{og}}(0,1)$~~  sería

$$\text{el plano tangente de } (0,1) \text{ sería } z = -3x - 20y - 8$$

~~$-3x - 20y - 8 = z$~~   
 ~~$-3(5) - 20(1) - 8 = z$~~   
 ~~$-15 - 20 - 8 = z$~~   
 ~~$-35 - 28 = z$~~   
 ~~$-63 = z$~~

antes calculé que  $f(4,-1) = -28$

$$-3(5-0) - 20(x-1) - 28 = z$$

$$-15 - 20x + 20 - 28 = z$$

$$-15 - 20x - 8 = z$$

$$\boxed{\text{LTA} = z = -15 - 20x - 8}$$