5



Nombre y apellido.............................................................. Número de libreta..........

Turno (tachar lo que no corresponda): | Tarde: Ma-Ju 14 a 17 hs. | Noche: Ma-Ju 19 a 22 hs. |

**Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega**

*Entrego ejercicios* 1 2 3 4 5

(Reservado para el corrector):

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Nota |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido.** *Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.*

**Ej 1.** La cantidad de combustible disponible al iniciar el día en el depósito de una planta industrial, en miles de litros, es una variable aleatoria $Y$. Un equipo de la planta consume una cantidad aleatoria diaria $X$. El tanque de donde se abastece el equipo no se rellena durante el día, por lo que $X \leq Y$, y supongamos que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Obtener las densidades marginales de $X$ e $Y$.

(b) ¿Son $X$ e $Y$ variables aleatorias independientes? Justificar la respuesta.

(c) Considerar la variable $W = Y - X$ que representa la cantidad de combustible que queda al final del día cuando el equipo deja de funcionar y calcular

i. $E(W)$

ii. $\mathrm{cov}(X, W)$.

**Ej 2.** La colonia de vacaciones del club F quisiera tener la mayor cantidad posible de asistentes a la colonia para cubrir sus gastos. Ya ha comprobado que los comportamientos de los distintos inscriptos son independientes y que sólo el 60% de los chicos que se inscriben a la colonia finalmente asisten a ella, por más que les cobren una cuota de inscripción.

deciden asistir

(a) Este año ha decidido inscribir a 1700 niños. Si la colonia sólo tiene lugar para 1060 alumnos, hallar la probabilidad aproximada de que tenga que dejar chicos afuera el primer día de colonia.

(b) La inscripción a la colonia es de \$50, si el chico va a asistir durante un mes a la colonia paga \$300 además de la inscripción y si asiste dos meses paga \$600 además de la inscripción. El 40% de los niños que se inscriben asiste durante un mes y el 20% restante asiste dos meses. Hallar la esperanza y la varianza del dinero recaudado por el club F durante la colonia de vacaciones si decide inscribir a 1700 niños.

(c) Si la colonia no tuviera restricción de espacio, hallar la cantidad de inscriptos que el club debería aceptar para que la probabilidad aproximada de que el club recaude en promedio más de \$282 por inscripto sea mayor que 0.95.

**Ej 3.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad

$$f_{X_1}(x;\theta) = \frac{4\theta^4}{x^5} I_{[\theta,+\infty)}(x), \qquad \theta > 0.$$

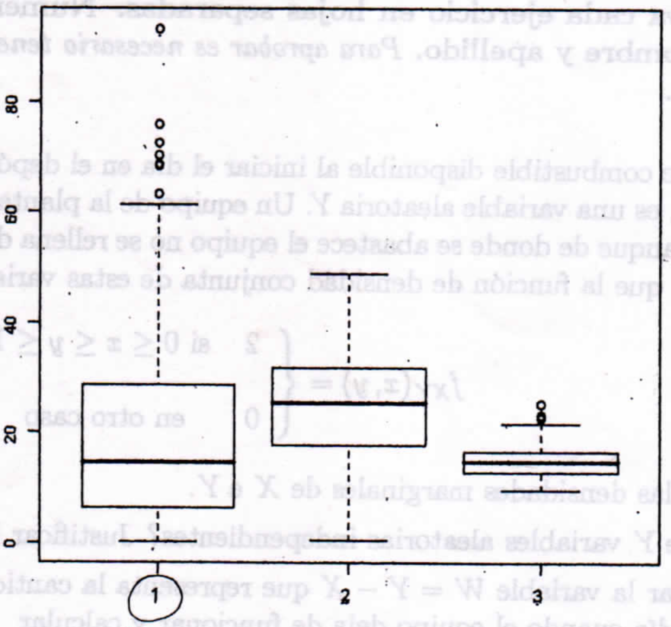
(a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$.

(b) Decir si el estimador obtenido es insesgado o asintóticamente insesgado. Justificar.

NO

Ej 4. Se quiere estimar el tiempo medio de demora de atención a los reclamos de los clientes de una compañía telefónica. Para ello se toma una muestra consistente en 180 llamados a la central de reclamos. Sean $X_1, \dots, X_n$ los tiempos observados medidos en minutos, $n = 180$, $\overline{x} = 19.81$, $\widetilde{x} = mediana = 14.53$, $s_x = 17.7$, $DI = 22.261$ (rango o distancia intercuartil).

(a) Indicar cuál de los siguientes boxplots corresponde a los $X_1, \dots, X_n$ observados, haciendo un círculo sobre el número que figura debajo.




(b) Ahora decidimos expresar el tiempo en horas (no en minutos). Llamamos $Y_1, \dots, Y_{180}$ a las observaciones expresadas en horas. Entonces su nuevo promedio, mediana y desvío estándar son, respectivamente (completar en el casillero, no entregar los cálculos auxiliares)

$\overline{y} =$ ☐ , $\widetilde{y} =$ ☐ , $s_y =$ ☐

(c) Hallar un intervalo de confianza para la el tiempo medio de demora de atención a los reclamos de los clientes basado en la muestra $X_1, \dots, X_{180}$ de nivel aproximado 0.99. Definir las variables aleatorias, los parámetros y dar la distribución (exacta o aproximada) del estadístico en el que se basa para hallarlo.

(d) La empresa de telefonía afirma que da respuesta a los reclamos con un tiempo medio de demora de 12 minutos. ¿Es compatible esta afirmación con el intervalo de confianza construido en el ítem anterior a nivel 0.99?

Ej. 5 El peso (en gramos) de las manzanas de una cierta región de la Patagonia es una variable aleatoria normal con varianza 25. Juan afirma que el peso medio las manzanas producidas en su chacra en dicha región de la Patagonia es superior a 200 gramos. Sea $\mu$ el peso medio de una manzana producida en la chacra de Juan. Para verificar su conjetura se desea testear las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu = 200$$
$$H_1 : \mu > 200.$$

(a) Hallar un test apropiado de nivel $\alpha$ para las hipótesis planteadas, indicando el estadístico del test, su distribución bajo $H_0$ y la región de rechazo.

(b) Si un cajón que contiene 50 manzanas producidas en la chacra de Juan pesa 10066 gramos, calcular el $p-$valor correspondiente a la muestra. Determinar para cuáles de los siguientes niveles de significación se rechaza la hipótesis nula: $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.10$.

**Ej 1.** (a) $f_X(x) = 2(1-x)\, I_{[0,1]}(x)$
$f_Y(y) = 2y I_{[0,1]}(y)$

(b) $X$ e $Y$ no son variables aleatorias independientes pues el sop$(f_{XY}) \neq$sop$(f_X) \times$sop$(f_Y)$. O bien porque cov$(X,Y) \neq 0$ (la calculamos en el ítem que sigue). sim contraej. (3P)

(c) i. $\mathrm{E}(W) = E(Y-X) = E(Y) - E(X) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ii. $\mathrm{cov}(X,W) = \mathrm{cov}(X,Y) - \mathrm{cov}(X,X) = \frac{1}{36} - \frac{1}{18} = \cancel{\frac{1}{18}}$. Vemos que $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} \neq 0$.
$= -1/36.$

**Ej 2.** (a) Sea $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el iésimo chico inscripto asiste a la colonia} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$.

Tenemos $(X_i)_{1 \leq i \leq n=1700} \sim Bi(1,p)$ v.a.i.i.d.

Luego $P\left(\sum_{i=1}^{1700} X_i > 1060\right) \simeq P\left(Z > \frac{1060-1700*0.6}{\sqrt{1700*0.6*0.4}}\right) = 1 - \Phi(1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239$

(b) Sea $Y_i$ =dinero que paga el iésimo niño que se inscribe a la colonia.
Tenemos $(X_i)_{1 \leq i \leq n=1700}$ v.a.i.i.d. La probabilidad puntual de $Y_i$ está dada por

| $k$ | $p_{Y_1}(k)$ |
|---|---|
| 50 | 0.40 |
| 350 | 0.40 |
| 650 | 0.20 |

$\mathrm{E}(Y_1) = 290$, $\mathrm{var}(Y_1) = 50\,400$.
$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{1700} Y_i) = 1700 * 290 = 493\,000$
$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{1700} Y_i) = 1700 * 50\,400 = 85\,680\,000$

(c) Buscamos $n$ tal que $P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i > 282\right) > 0.95 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{(282-290)\sqrt{n}}{\sqrt{50400}}\right) > 0.95$
$\Leftrightarrow \frac{-8\sqrt{n}}{\sqrt{50400}} < -1.65 \Leftrightarrow n \geq 2144$

**Ej 3.** (a) $\widehat{\theta} = \min_{1 \leq i \leq n}(X_i)$.

(b) $f_{\widehat{\theta}}(t) = \frac{4n\theta^{4n}}{t^{4n+1}} I_{[\theta,+\infty)}(t)$. $E\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{4n}{4n-1}\theta \to \theta$ cuando $n \to \infty$. Luego $\widehat{\theta}$ no es insesgado, sí es asintóticamente insesgado.

Ej 4. (a) Rta: 1.

(b) $\overline{y} = \boxed{\frac{19.81}{60} = 0.330\,17}$, $\widetilde{y} = \boxed{\frac{14.53}{60} = 0.242\,17}$, $s_y = \boxed{\frac{17.7}{60} = 0.295}$

(c) $IC(\mu) = \left[\overline{X} \pm z_{0.995} * \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = [16.406;\ 23.214]$

(d) No, $\mu = 12 \notin IC$ calculado en c).

Ej. 5

$$H_0 : \mu = 200$$
$$H_1 : \mu > 200.$$

(a) RR: $Z = \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} > z_\alpha$ donde $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$.

(b) $p-$valor $= 1 - \Phi\left(\frac{\left(\frac{10066}{50} - 200\right)\sqrt{50}}{5}\right) = 1 - \Phi(1.866\,8) = 1 - 0.9693 = 0.030\,7$

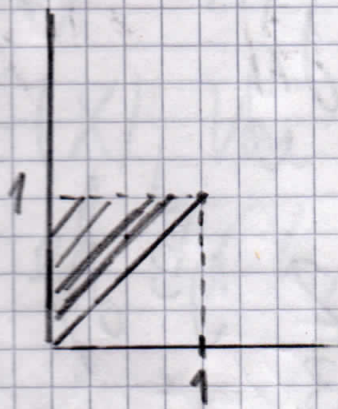
A nivel $\alpha = 0.01 < pvalor = 0.03 \Rightarrow$ No rechazo $\mathrm{H_0}$.
A nivel $\alpha = 0.05 > pvalor = 0.03 \Rightarrow$ Rechazo $\mathrm{H_0}$.
A nivel $\alpha = 0.10 > pvalor = 0.03 \Rightarrow$ Rechazo $\mathrm{H_0}$.

(5)

2º CUAT 2010

1.

a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq y < 1 \\ 0 & cc \end{cases}$



$f_X(x) = 2(1-x)\, I_{[0,1]}(x)$

$f_Y(y) = 2y\, I_{[0,1]}(y)$

b) NO

c) $W = Y - X$

$E(Y) = \frac{2}{3} \qquad E(X) = \frac{1}{3}$

$E(Y-X) = E(Y) - E(X) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$Cov(X,W) = E(XW) - E(X)E(W)$

$E(X(Y-X)) = E(XY - X^2)$

$= E(XY) - E(X^2)$

$$\int_0^1 \int_0^y 2xy \, dx\, dy = \int_0^1 \cancel{2} y \left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y^3 \, dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = E(XY)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \int_0^y 2x^2 \, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{2}{3} y^3 \, dy$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3}\left[\frac{y^4}{\cancel{4}_2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Cov(X,W) = E(XY) - E(X^2) - E(X)E(W)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

5

2.

a) $X_i \sim Be(0.6)$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, 0.6) = X$$

$$E(X) = np \quad Var(X) = np(1-p)$$

$$E(X), Var(X) < \infty$$

Por el TCL,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n0.6}{\sqrt{n*0.6*0.4}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{1700} X_i > 1060\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1700} X_i - 1020}{\sqrt{1700*0.6*0.4}} > \frac{1060-1020}{\sqrt{408}}\right) \underset{\underset{TCL}{\uparrow}}{\simeq} 1 - \phi(1.98) = 1 - 0.9761$$

$$= 0.0239$$

b) W: Pago del chico por asistencia

$$R_W = \{300, 600\}$$

$$E(W) = 300 * 0.4 + 600 * 0.2 = 240$$

$$E(W^2) = 300^2 * 0.4 + 600^2 * 0.2 = 108000$$

$$Var(W) = 108000 - 240^2 = 50400$$

$$E(50+W) = E(50) + E(W) = 290$$

$$Var(W+50) = Var(W) = 50400$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{1700} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1700} E(X_i) = 1700 * 290 = 493000$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{1700} X_i\right) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{i=1}^{1700} Var(X_i) = 85680000$$

c) $$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} > 282\right) = P\left(\bar{X}_n - 290 > 282 - 290\right)$$

$$= P(\bar{X}_n - 290 > -8) \geq P(|X_n - 290| < 9)$$

$$\geq 1 - \frac{Var(\bar{X}_n)}{9^2} = 1 - \frac{50400}{9^2 n} > 0.95$$

$$1 - \frac{5600}{9n} > 0.95$$

$$0.05 > \frac{5600}{9n}$$

$$n > \frac{5600}{0.05 * 9} = 12444.44$$