1	2	3	4	5	Calificación
B=	B	R	M	B-	A

APELLIDO Y NOMBRE: Losiggio Ignacio Esteban NO. DE LIBRETA: 751/17
TURNO: ☐ Mañana ☐ Tarde ■ Noche CARRERA: Computación

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer parcial - 10/10/2017

---

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$ Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ definida por:

$$(A, B)\mathcal{R}(C, D) \text{ si } A \triangle B \subseteq C \triangle D.$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

   b) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Hallar la cantidad de elementos $(C, D) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ tales que $(A, B)\mathcal{R}(C, D)$.

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(1) = 3$$

   y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) = \begin{cases} \frac{\left(2f(\frac{n+1}{2})\right)^2}{n+1} & \text{si } n+1 \text{ es par} \\ 3^{n+1} + 3f(n) & \text{si } n+1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Probar que $f(n) = n3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 23 bolitas azules numeradas y 7 bolitas verdes indistinguibles en 12 cajas numeradas de manera que haya a lo sumo una bolita verde en cada caja y que la primera caja no quede vacía?

4. Hallar el resto de la división de $\sum_{i=0}^{102}(i^6 + i)$ por 4 y por 5.

5. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, hallar el valor de $d = (a^2 - 7a + 2 : 6 - a)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Fecha / /

Hoja 1

1) a)

Reflexiva

$$(A, A') R (A, A') \iff A \Delta A' \subseteq A \Delta A'$$

$\boxed{\text{Sí}}$ xq $(A \Delta A') = (A \Delta A')$

Simétrica

$$(A, A') R (B, B') \iff (B, B') R (A, A')$$

$\boxed{\text{No vale}}$ contraejemplo

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A' = \{4, 5, 6\}$ $B' = \{1, 2, 3\}$

$A \Delta A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B \Delta B' = \{4\}$

$(B, B') R (A, A')$ vale pero

$(A, A') R (B, B')$ NO

Antisimétrica

$$(A, A') R (B, B') \text{ y } (B, B') R (A, A') \iff (A, A') = (B, B')$$

$\boxed{\text{No vale}}$ contraejemplo

$A = \{1, 4, 5\}$ $B = \{1, 6, 7\}$

$A' = \{4, 5\}$ $B' = \{6, 7\}$

$A \Delta A' = \{1\}$ $B \Delta B' = \{1\}$

$(A, A') \neq (B, B')$

Transitiva

$(A,A')R(B,B')$ y $(B,B')R(C,C') \Rightarrow (A,A')R(C,C')$

Vale, porque

Si $(A \Delta A') \subseteq (B \Delta B')$ y $(B \Delta B') \subseteq (C \Delta C')$

tiene más elementos o es igual

es igual

Tiene más elementos o es igual

tiene más elementos o es igual

Por ende

$(A \Delta A') \subseteq (C \Delta C')$ ✓

(D) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \Delta B = \{1, 2, 7, 8\}$

Hay 2^6 $C \Delta D$ posibles, saber los (C,D) posibles es más difícil

Como $C \Delta D$ tiene que incluir a 1, 2, 7 y 8 estos tienen que estar o en C o en D; cada uno tiene dos lugares a donde ir por lo que tienen $\boxed{2^4}$ formas de disponerse.

Quedan 6 símbolos (3, 4, 5, 6, 9, 10) que pueden ir a uno, al otro o a ambos (3 opciones) por lo que tienen $\boxed{3^6}$ formas de ubicarse

o a ninguno no, son 4 opciones

Lo que da lugar a $2^4 \cdot 3^6$ pares (C,D)

4

$\boxed{11664}$

Fecha __/__/__ Hoja 2

5) $(a^2-7a+2 : 6-a)$

$d \mid a^2-7a+2$

$d \mid 6-a \rightarrow d \mid a-6 \rightarrow d \mid a^2-6a$

$d \mid a+2 \qquad \leftarrow d \mid -a+2$

$d \mid 8$ 4 $\rightarrow$ d puede ser 1, 2, 4 ó 8 no

puede

$a=1 \quad (-4 : 5) = \boxed{1}$

$a=2 \quad (4-14+2 : 4)$

$(-8 : 4) = 4$

$a=3 \quad (9-21+2 : 3)$

$(-10 : 3) = 1$

$a=4 \quad (16-28+2 : 2)$

$(-10 : 2) = \boxed{2}$

$a=-2 \quad (4+14+2 : 8) =$

$(20 : 8) = \boxed{4}$

No encuentro un valor que el mcd sea 8 ok.

a^2-7a+2

resto	valor	(8)	(4)	(2)
0	2	2	2	0
1	-4	4	0	1
2	-8	0	0	
3	-10	6	2	
4	-10	6		
5	-8	0		
6	-4	4		
7	2	2		

$6-a$

resto	valor	(8)	(4)	(2)
0	6	6	2	0
1	5	5	1	1
2	4	4	0	
3	3	3	3	
4	2	2		
5	1	1		
6	0	0		
7	-1	7		

Para los $\boxed{a}$ de la forma:

1) $4k+0 \rightarrow mcd = 2$
2) $4k+1 \rightarrow mcd = 1$
3) $4k+2 \rightarrow mcd = 4$
4) $4k+3 \rightarrow mcd = 1$

$\rightarrow k \in \mathbb{Z}$

por qué?

③ Hay 7 bolitas verdes, como máximo 1 por caja

esto me determina que hay 7 "cajas verdes"

y 5 cajas comunes

$$\binom{12}{7}\binom{5}{5}$$

De 12 cajas 7 son verdes las 5 restantes comunes

$$\frac{12!}{7!\,5!} = \frac{8.9.10.11.12}{\cancel{1}.\cancel{2}.\cancel{3}.4.5} = 792 \text{ formas}$$ ✓

de ordenar las cajas

(poner bolitas verdes)

23 bolitas numeradas en 12 cajas / estantes corresponde

al anagrama de cadenas de letras de 11 "a"s y 23 otras

letras distinguibles entre sí

$$\binom{11+23}{11}.23!$$

MAL CONTADO

OJO!

en las cajas no importa el orden

De los espacios, ubico 11 "a"s, ordeno el resto en los espacios

vacíos

falta saber cuántas maneras hay de que la primer caja quede

vacía, con el razonamiento anterior es quitar una caja y

reescribir el planteo

$$\binom{11}{7}\binom{10+23}{10}.23!$$

NO

Bolas

verdes

Fecha __/__/__ Hoja 3

Entonces, la rta final es

$$\binom{12}{7}\cdot\binom{11+23}{11}\cdot 23! - \binom{11}{7}\cdot\binom{10+23}{10}\cdot 23!$$

O escrito más conciso

$$23!\left[\binom{12}{7}\cdot\binom{34}{11} - \binom{11}{7}\cdot\binom{33}{10}\right]$$

NO

4)

$$\sum_{i=0}^{102} (i^6+i)$$

i^6+i	resto	(4)	(5)
0	0	0	0
2	1	2	2
66	2	2	1
732	3	0	3
4100	4	0	0

?

El resto de la división por 4

Van a sumarse 103 términos

resto

$4k+0 \rightarrow 26$ veces $\rightarrow 26\times 0 = 0$

$4k+1 \rightarrow 26$ veces $\rightarrow 26\times 2 = 52$

$4k+2 \rightarrow 26$ veces $\rightarrow 26\times 2 = 52$

$4k+3 \rightarrow 25$ veces $\rightarrow 25\times 0 = 0$

104

El resto es congruente a 104 en módulo 4

el resto es 0

El resto de la división por 5

Se van a sumar 103 términos

forma	cant	restos acumulados
$5k+0$	21	$21 \times 0 = 0$
$5k+1$	21	$21 \times 2 = 42$
$5k+2$	21	$21 \times 1 = 21$
$5k+3$	20	$20 \times 3 = 60$
$5k+4$	20	$20 \times 0 = 0$

El resto es 3

123

$122 \equiv 3 (5)$ ✓

Por si no se entiende, explicación de lo que hice

dividí la sumatora en una suma de sumatorias equivalentes, en el caso del 4

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{25}\left[(4k+0)^6 + 4k+0\right]}_{\text{los 26 múltiplos de 4 de 0 a 102}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{25}\left[(4k+1)^6 + 4k+1\right]}_{\text{números con resto 1 de 0 a 102 } (1, 5, 9, 101)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{25}\left[(4k+2)^6 + 4k+2\right]}_{\text{números con resto 2 de 0 a 102 } (2, 6, 10, 102)}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=0}^{24}\left[(4k+3)^6 + 4k+3\right]}_{\text{con resto 3 } [3, 7, 11 \ldots 99]}$$

✓

Hoja 4

dado esto la suma se convertía en la suma del resto de cada sumatoria $(26\times 0, 26\times 1, 26\times 2, 25\times 3)$

y este número tenía que ser congruente al resto.

mismo método para la división por 5 OK

② pruebo $P(1)$, $P(2)$ y $P(3)$

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{\left(2f\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2}{n} & \text{si n es par} \\ 3^n + 3f(n-1) & \text{si n es impar} \end{cases}$$

$f(1) = 3$

qvq $f(n) = n3^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$P(1) = 3 = 1 \cdot 3^1$ ✓

$P(2) = 18 = 2 \cdot 3^2$ ✓

$P(3) = 27 + 3 \cdot 18 = 81 = 3 \cdot 3^3$ ✓

Voy a usar inducción completa

✓

9va

$P(1), P(2), P(3) \dots P(n-1), P(n) \Rightarrow P(n+1)$

si $n+1$ es par

$$f(n+1) = \frac{\left(2 f\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^2}{n+1} \quad HI$$

$$f(n+1) = \frac{\left(\cancel{2} \cdot \frac{n+1}{\cancel{2}} \cdot 3^{\frac{n+1}{\cancel{2}}}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{n+1}}$$

$$\boxed{f(n+1) = 3^{n+1}}$$

Error, lo corrijo más abajo

Si $n+1$ es impar

$$f(n+1) = 3^{n+1} + 3 f(n) \quad HI$$

$$f(n+1) = 3^{n+1} + 3n3^{n}$$

$$f(n+1) = 3^{n+1} + n3^{n+1}$$

$$\boxed{f(n+1) = (n+1)3^{n+1}}$$

$$f(n+1) = \frac{\left(\cancel{2}\ \frac{n+1}{\cancel{2}} \cdot 3^{\frac{n+1}{2}}\right)^2}{n+1}$$

$$f(n+1) = \frac{(n+1)^{\cancel{2}} \cdot 3^{\frac{n+1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}}}{\cancel{n+1}}$$

$$\boxed{f(n+1) = (n+1) \cdot 3^{n+1}}$$

Fecha / /