1	2	3	4
B|B	B	B	B|B

CALIF.
10

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

CARRERA: CUATR. APROBACIÓN TPS:

CUATR. APROBACIÓN TALLER:

¿SI APROBÓ EN 2DO C 2021, LLENÓ LA ENCUESTA?

Algebra I

Examen Final (4/3/2022)

---

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Se define la relación $\Re$ siguiente en $\mathbb{N}$:

$$m \Re n \iff f(m) \mid f(n).$$

   (a) Probar que $\Re$ es una relación de orden.

   (b) Para la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = 12n + 20$, caracterizar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $1 \Re n$.

---

2. Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $n^{1021} \equiv 22 \pmod{55}$ y $5 \mid n\,2^n - 3\,n^5$.

---

3. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ definida por:

$$f_1 := X - 1\ ,\ f_2 = 2X^2 - X - 2 \quad \text{y} \quad f_{n+2} = X\,f_{n+1} + 2X^2 f_n - 2\,X + 3,\ \forall\, n \geq 1.$$

Conjeturar y probar fórmulas para el coeficiente principal y el grado de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

4. (a) Determinar todos los números enteros a y b para los cuales el polinomio

$$X^{101} + 33\,a\,X^4 + X^3 + 12\,b\,X^2 - 18\,X + 1$$

   tiene al menos una raíz racional.

   (b) Decidir si existen números enteros a y b para los cuales el polinomio tiene una raíz racional múltiple.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

HOJA N°

FECHA

Ej 1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$m \mathcal{R} n \Leftrightarrow f(m) \mid f(n)$

a). reflexividad: ¿$\forall m \in \mathbb{N}$ ~~[illegible]~~ $m \mathcal{R} m$?

$m \mathcal{R} m \Leftrightarrow f(m) \mid f(m)$

$f(m) = q$ con q $\mathbb{N}$ $\quad q \mid q \quad \forall q \in \mathbb{N}$ ✓

$\therefore \mathcal{R}$ es reflexiva

Bien

. ~~simetría~~:

. transitividad: ¿$\forall m, n, t \in \mathbb{N}$ si $m \mathcal{R} n$, $n \mathcal{R} t \Rightarrow m \mathcal{R} t$?

$m \mathcal{R} n \Leftrightarrow f(m) \mid f(n)$

$n \mathcal{R} t \Leftrightarrow f(n) \mid f(t)$

$m \mathcal{R} t \Leftrightarrow f(m) \mid f(t)$

Ahora: $f(m) \mid f(n) \Leftrightarrow f(n) = f(m) . k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$f(n) \mid f(t) \Leftrightarrow f(t) = f(n) . q$ con $q \in \mathbb{Z}$

Entonces: $f(t) = f(m) . k . q$ y $j = k . q \in \mathbb{Z}$

$f(t) = f(m) . j \Leftrightarrow f(m) \mid f(t) \Leftrightarrow m \mathcal{R} t$ $\boxtimes$

$\therefore \mathcal{R}$ es transitiva

Bien

. antisimétrica: ¿$\forall m, n \in \mathbb{N}$ si $m \mathcal{R} n$ y $n \mathcal{R} m \Rightarrow m = n$?

$m \mathcal{R} n \Leftrightarrow f(m) \mid f(n) \Leftrightarrow f(n) = f(m) . k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow f(n) \mid f(m) \Leftrightarrow f(m) = f(n) . q$ con $q \in \mathbb{Z}$

Entonces: $f(m) = f(m) . k . q \underset{\substack{f(m) \neq 0 \\ \text{pues } \in \mathbb{N}}}{\Leftrightarrow} 1 = k . q \Leftrightarrow \frac{1}{q} = k$

NOTA

~~[illegible]~~

Como $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow q = \pm 1$ pero como $f(m) = f(n) \cdot q$

y $f(m) \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{N} \Rightarrow q = 1$, $k = 1$

$f(m) = f(n) \cdot q \Rightarrow f(m) = f(n)$

Como f es inyectiva

$f(m) = f(n) \Leftrightarrow m = n$ Bien

$\therefore \mathcal{R}$ es antisimétrica

Como $\mathcal{R}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica

$\mathcal{R}$ es una relación de orden.

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: f(n) = 12n + 20$

$1 \mathcal{R} n \Leftrightarrow f(1) \mid f(n)$

$f(1) = 12 + 20 = 32$

$1 \mathcal{R} n \Leftrightarrow 32 \mid f(n) \Leftrightarrow 12n + 20 \equiv 0\ (32)$

$12n + 20 \equiv 0\ (32) \Leftrightarrow 12n \equiv 12\ (32)$

$32 = 2^5$, $12 = 3 \cdot 2^2$

coprimizo:

$12n \equiv 12\ (32) \Leftrightarrow 3n \equiv 3\ (8) \underset{3 \perp 8}{\Leftrightarrow} 3 \cdot 3n \equiv 3 \cdot 3\ (8)$

$9n \equiv 9\ (8) \Leftrightarrow n \equiv 1\ (8)$

Bien

Así:

$1 \mathcal{R} n \quad \forall n \in \mathbb{N} \,/\, n \equiv 1\ (8)$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Ej 2 $\quad n^{1021} \equiv 22\,(55)$ y $5 \mid n2^n - 3n^5$

$$5 \mid n2^n - 3n^5 \iff n2^n - 3n^5 \equiv 0\,(5)$$

$55 = 11 . 5$

$$n^{1021} \equiv 22\,(55) \iff \begin{cases} n^{1021} \equiv 22\,(11) \\ n^{1021} \equiv 22\,(5) \end{cases}$$

Bien

. si $5 \nmid n$:

$$n^{1021} \underset{\substack{5 \text{ primo} \\ \text{PTF}}}{\equiv} n^{r_4(1021)} \equiv n^1 \equiv 22\,(5) \iff n \equiv 2\,(5)$$

. si $5 \mid n$:

$$n^{1021} \equiv 0\,(5) \text{ ¡Abs! pues } n^{1021} \equiv 22\,(5) \not\equiv 0\,(5)$$

$\cancel{\text{si } 11 \nmid n:}$

$$\cancel{n^{1021} \underset{\substack{11 \text{ primo} \\ \text{PTF}}}{\equiv} n^{r_{10}(1021)} \equiv n^1 \equiv 22\,(11) \iff n \equiv 0\,(11)}$$

$$n^{1021} \equiv 22\,(11) \iff n^{1021} \equiv 0\,(11) \iff n \equiv 0\,(11)$$

Entonces:

$$\begin{cases} n \equiv 2\,(5) \\ n \equiv 0\,(11) \end{cases}$$ como $5 \perp 11$ por TChR $\exists!$ solución módulo 55

$n \equiv 0\,(11) \iff n = 11k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$11k \equiv 2\,(5) \iff k \equiv 2\,(5) \iff k = 5j + 2 \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$n = 11k = 11(5j+2) = 55j + 22 \qquad n \equiv 22\,(55)$$

NOTA

$5 \mid n2^n - 3n^5 \iff n2^n - 3n^5 \equiv 0\ (5)$

Ya vimos que $n \equiv 2\ (5)$

$n2^n - 3n^5 \equiv 2 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^5 \equiv 2 \cdot 2^n - 1 \equiv 0\ (5)$

$2 \cdot 2^n - 1 \equiv 0\ (5) \iff 2 \cdot 2^n \equiv 1\ (5) \underset{\substack{5 \nmid 2 \\ 5 \text{ primo} \\ \text{PFF}}}{\iff} 2 \cdot 2^{r_4(n)} \equiv 1\ (5)$

$r_4(n)$: 0 1 2 3

. $r_4(n) = 0$

$2 \cdot 2^0 \equiv 2\ (5) \not\equiv 1\ (5)$ No sirve.

. $r_4(n) = 1$

$2 \cdot 2 \equiv 4\ (5) \not\equiv 1\ (5)$ No sirve.

. $r_4(n) = 2$

$2 \cdot 2^2 \equiv 3\ (5) \not\equiv 1\ (5)$ No sirve.

$r_4(n) = 3$

$2 \cdot 2^3 \equiv 1\ (5)$ ✓

Entonces tengo:

$\begin{cases} n \equiv 22\ (55) \\ n \equiv 3\ (4) \end{cases}$ Como $55 \perp 4$ por TChR $\exists!$ sol. módulo 220

$\cancel{4k+3 \equiv 22\ (55) \iff 4k \equiv 19\ (55)}$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

$n \equiv 22(55) \Leftrightarrow n = 55k + 22$ con $k \in \mathbb{Z}$

$55k + 22 \equiv 3(4) \Leftrightarrow 3k + 2 \equiv 3(4) \Leftrightarrow 3k \equiv 1(4)$

$3k \equiv 1(4) \Leftrightarrow -k \equiv 1(4) \Leftrightarrow k \equiv 3(4) \Leftrightarrow k = 4m + 3$ con $m \in \mathbb{Z}$

$n = 55k + 22 = 55(4m + 3) + 22 = 220m + 187$

$n \equiv 187(220)$

Los n que cumplen lo pedido son de la forma:

$n \equiv 187(220)$

Bien

NOTA

HOJA Nº

FECHA

Ej 3 $f_1 = x-1$ $f_2 = 2x^2 - x - 2$ $f_{n+2} = x f_{n+1} + 2x^2 f_n - 2x + 3 \ \forall n \geq 1$

Veamos algunos casos:

- $f_1 = x - 1$ $cp(f_1) = 1$, $gr(f_1) = 1$
- $f_2 = 2x^2 - x - 2$ $cp(f_2) = 2$ $gr(f_2) = 2$
- $n = 1$ $f_3 = x f_2 + 2x^2 f_1 - 2x + 3$

$$= x \cdot (2x^2 - x - 2) + 2x^2 (x-1) - 2x + 3$$
$$= 2x^3 - x^2 - 2x + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$$
$$f_3 = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 \quad cp(f_3) = 4,\ gr(f_3) = 3$$

- $n = 2$: $f_4 = x \cdot f_3 + 2x^2 \cdot f_2 - 2x + 3$

$$= x(4x^3 - 3x^2 - 4x + 3) + 2x^2 (2x^2 - x - 2) - 2x + 3$$
$$= 4x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 4x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$$
$$f_4 = 8x^4 - 5x^3 - 8x^2 + x + 3 \quad cp(f_4) = 8 \quad gr(f_4) = 4$$

- $n = 3$ $f_5 = x \cdot f_4 + 2x^2 \cdot f_3 - 2x + 3$

$$= x \cdot (8x^4 - 5x^3 - 8x^2 + x + 3) + 2x^2 (4x^3 - 3x^2 - 4x + 3) - 2x + 3$$
$$= 8x^5 - 5x^4 - 8x^3 + x^2 + 3x + 8x^5 - 6x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$$
$$= 16x^5 - 11x^4 - 16x^3 + 7x^2 + x + 3 \quad cp(f_5) = 16 \quad gr(f_5) = 5$$

$cp(f_1) = 1$ $gr(f_1) = 1$

$cp(f_2) = 2$ $gr(f_2) = 2$

$cp(f_3) = 4$ $gr(f_3) = 3$

$cp(f_4) = 8$ $gr(f_4) = 4$

$cp(f_5) = 16$ $gr(f_5) = 5$

NOTA

Conjetura:

$p(n)$: "$cp(f_n) = 2^{n-1}$"

$g(n)$: "$gr(f_n) = n$"

Bien

Lo pruebo por inducción

◦) Casos base $n=1$ y $n=2$:

$n=1$: $cp(f_1) = 1 = 2^0 = 2^{n-1}$ ✓ $gr(f_1) = 1 = n$ ✓

$n=2$: $cp(f_2) = 2 = 2^{n-1}$ ✓ $gr(f_2) = 2 = n$ ✓

◦) Paso inductivo: Sea $h \in \mathbb{N}$ dado

sup $p(h)$ V y $p(h+1)$ V Qpq $p(h+2)$ V

sup $g(h)$ V y $g(h+1)$ V Qpq $g(h+2)$ V

HI $cp(f_h) = 2^{h-1}$ $gr(f_h) = h$

$cp(f_{h+1}) = 2^h$ $gr(f_{h+1}) = h+1$

Qpq $cp(f_{h+2}) = 2^{h+1}$ $gr(f_{h+2}) = h+2$

$f_{h+2} \overset{def}{=} X f_{h+1} + 2X^2 f_h \Rightarrow gr(f_{h+2}) = gr(X f_{h+1} + 2X^2 f_h)$

Ahora:

▪ si $gr(Xf_{h+1}) \neq gr(2X^2 f_h) \Rightarrow$

$gr(Xf_{h+1} + 2X^2 f_h) = \max\{gr(Xf_{h+1}), gr(2X^2 f_h)\}$

▪ si $gr(Xf_{h+1}) = gr(2X^2 f_h) \Rightarrow$

si $cp(Xf_{h+1}) \neq -cp(2X^2 f_h)$

$gr(Xf_{h+1} + 2X^2 f_h) = gr(Xf_{h+1}) = gr(2X^2 f_h)$

si $cp(Xf_{h+1}) = -cp(2X^2 f_h)$

$gr(Xf_{h+1} + 2X^2 f_h) < gr(Xf_{h+1}) = gr(2X^2 f_h)$

SIGUE

HOJA N°

FECHA

$$f_{h+2} \overset{def}{=} x \cdot f_{h+1} + 2x^2 f_h - 2x + 3$$

$$gr(f_{h+2}) = gr(x f_{h+1} + 2x^2 f_h - 2x + 3)$$

Ahora: $gr(x f_{h+1}) = gr(x) + gr(f_{h+1}) \overset{HI}{=} h+2$

$gr(2x^2 f_h) = gr(2x^2) + gr(f_h) \overset{HI}{=} 2 + h$

$gr(2x) = 1$ y $gr(3) = 0$

Como $gr(2x^2 f_h) = gr(x \cdot f_{h+1}) = 2 + h \geq 3 > gr(2x) > gr(3)$

$\Rightarrow gr(x f_{h+1} + 2x^2 f_h - 2x + 3) = gr(2x^2 f_h)$ si y solo si

$cp(x f_{h+1}) \neq -cp(2x^2 f_h)$.

$cp(x f_{h+1}) = cp(x) \cdot cp(f_{h+1}) \overset{HI}{=} 1 \cdot 2^h = 2^h$

$cp(2x^2 f_h) = cp(2x^2) \cdot cp(f_h) \overset{HI}{=} 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$

Entonces:

$cp(x f_{h+1}) \neq -cp(2x^2 f_h)$

$\therefore gr(x f_{h+1} + 2x^2 f_h - 2x + 3) = gr(f_{h+2}) = h+2$ Como queríamos ver.

$cp(f_{h+2}) = cp(x f_{h+1} + 2x^2 f_h - 2x + 3)$

Como $gr(x f_{h+1}) = gr(2x^2 f_h)$ el $cp(f_{h+2}) = cp(x f_{h+1}) + cp(2x^2 f_h)$

$cp(f_{h+2}) = 2^h + 2^h = 2^{h+1}(2^{-1} + 2^{-1}) = 2^{h+1}$ Como queríamos ver

Así $p(n)$ y $g(n)$ son verdaderos $\forall n \geq 1$

Bien

NOTA

HOJA N°

FECHA

Ej 4.

a_ $f = x^{101} + 33ax^4 + x^3 + 12bx^2 - 18x + 1$

Por Lema de Gauss las raíces $\in \mathbb{Q}$ candidatas son $\alpha_1 = 1$ ó $\alpha_2 = -1$

Bien

$f(\alpha_1) = 1 + 33a + 1 + 12b - 18 + 1$

$= 33a + 12b - 15$

$f(\alpha_1) = 0 \iff 33a + 12b = 15$

$33 = 3.11 \quad 12 = 2^2.3 \quad 15 = 3.5$

$33a + 12b = 15 \underset{:3}{\iff} 11a + 4b = 5 \iff 11a = 5 - 4b$

$\iff a = \frac{5-4b}{11}$ como $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 11 \mid 5 - 4b$

$11 \mid 5 - 4b \iff 5 - 4b \equiv 0 (11) \iff 4b \equiv 5 (11) \underset{3 \perp 11}{\iff} 3.4b \equiv 3.5 (11)$

$\iff b \equiv 4 (11) \iff b = 11k + 4$ con $k \in \mathbb{Z}$

$a = \frac{5 - 4(11k+4)}{11} = \frac{5 - 44k - 16}{11} = \frac{-44k - 11}{11} = -4k - 1$

$a = -4k - 1 \quad b = 11k + 4$ con $k \in \mathbb{Z}$

$f(\alpha_2) = -1 + 33a - 1 + 12b + 18 + 1$

$= 33a + 12b + 17$

$f(\alpha_2) = 0 \iff 33a + 12b + 17 = 0 \iff 33a = -12b - 17$

$a = \frac{-12b - 17}{33}$ como $a \in \mathbb{Z}$ $33 \mid -12b - 17$

NOTA

Scanned with CamScanner

$33 \mid -12b - 17 \iff -12b - 17 \equiv 0\ (33) \iff 12b \equiv 16\ (33)$

Ahora $(12:33) = 3$ y $3 \nmid 16$ por lo tanto la ecuación no tiene solución

Los únicos a y b que sirven son aquellos con la forma: Bien

$$a = -4k - 1 \qquad b = 11k + 4 \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b. $f' = 101x^{100} + 4.33\,a\,x^3 + 3x^2 + 2.12\,b\,x - 18$

Ya vimos en el item (a) que $x = 1$ es raíz de f sii $a = -4k - 1$ y $b = 11k + 4$ con $k \in \mathbb{Z}$ y era la única raíz racional posible con a y $b \in \mathbb{Z}$. Entonces veamos si 1 es raíz multiple de f es decir si $f'(1) = 0$

Reemplazo a y b en f'

$$f' = 101x^{100} + 132(-4k-1)x^3 + 3x^2 + 24(11k+4)x - 18$$

$$f'(1) = 101 - 528k - 132 + 3 + 264k + 96 - 18$$
$$= -264k + 50$$

$$f'(1) = 0 \iff -264k + 50 = 0 \iff 264k = 50 \iff 132k = 25$$
$$\iff k = \frac{25}{132} \quad \text{¡Abs! pues } k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$ no existen a y $b \in \mathbb{Z}$ tales que f tenga raíces racionales multiples

Bien

NOTA