Tema 2

1	2	3	4	Calificación
B⁻	M	B⁻	B⁻	A

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO PRÁCTICO: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

L.U:

CARRERA:

Análisis I - Matemática 1 - Análisis II (C) - Análisis Matemático I

Primer Parcial - 3 de Octubre de 2015

---

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida por $a_n := 4 - \dfrac{9}{n}$.
   Calcular, si existen, el supremo y el ínfimo del conjunto
$$A := \left\{a_n^2 - 3a_n - 10 :\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos((y-1)^2x))\,(x+2)}{(x+2)^4+(y-1)^4} & \text{si } (x,y) \neq (-2,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (-2,1) \end{cases}$$
   Analizar la continuidad y diferenciabilidad de f en el punto $(-2,1)$.

   Sugerencia: Calcular el límite $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2}$.

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x,y) = \left(\ln(2y-3x) + yx^2, \operatorname{sen}(y+1)e^{y(x+1)}\right),$$
   y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que
$$\nabla(g\circ f)(-1,-1) = (-2,2).$$
   Calcular la derivada direccional $\frac{\partial g}{\partial v}(-1,0)$ para la dirección $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

---

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(-1,0)$ es
$$P(x,y) = xy - y + 1.$$
   Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como
$$g(x,y) = e^{xf(x+1,3y)+2}.$$
   Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $(-2,0)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

JONATHAN
SEIJO

① $a_n := 4 - \frac{9}{n}$

· Calcular, si existen, el supremo y el ínfimo del conjunto.

$$A := \{ a_n^2 - 3a_n - 10 : n \in \mathbb{N} \}$$

Defino la sucesión $b_n = a_n^2 - 3a_n - 10$.

$$b_n = \left(4 - \frac{9}{n}\right)^2 - 3\left(4 - \frac{9}{n}\right) - 10$$

$$b_n = 4^2 - \frac{72}{n} + \frac{81}{n^2} - 12 + \frac{27}{n} - 10$$

$$b_n = \frac{81}{n^2} - \frac{45}{n} - 6$$

Veo como se comporta en los primeros términos.

$$b_1 = 81 - 45 - 6 = 30$$

$$b_2 = \frac{81}{4} - \frac{45}{2} - 6 = -8{,}25$$

$$b_3 = \frac{81}{9} - \frac{45}{3} - 6 = -12$$

$$b_4 = \frac{81}{16} - \frac{45}{4} - 6 = -12{,}1875$$

$$b_5 = \frac{81}{25} - \frac{45}{5} - 6 = -11{,}76$$

$$b_6 = \frac{81}{36} - \frac{45}{6} - 6 = -11{,}25$$

Puedo ver que b_n decrece hasta b_4, y luego es creciente. Voy a probarlo.

quiero ver que b_n es creciente (a partir de $n=4$)

$$b_n < b_{n+1}$$

$$-6 - \frac{45}{n} + \frac{81}{n^2} < \frac{81}{(n+1)^2} - \frac{45}{(n+1)} - 6$$

$$\frac{81-45n}{n^2} < \frac{81-45(n+1)}{(n+1)^2} \qquad \begin{cases} n^2 > 0 \\ (n+1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$81(n+1)^2 - 45n(n+1)^2 < 81n^2 - 45n^2(n+1)$$

$$\cancel{81n^2} + 162n + 81 - \cancel{45n^3} - 90n^2 - 45n < \cancel{81n^2} - \cancel{45n^3} - 45n^2$$

$$-90n^2 + 117n + 81 < -45n^2$$

$$-45n^2 + 117n + 81 < 0$$

$$9(-5n^2 + 13n + 9) < 0$$

$$-5n^2 + 13n + 9 < 0$$

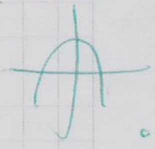
usando la resolvente cuadrática para ver cuando es cero

$$n = -13 \pm \sqrt{13^2 - 4.(-5).9}$$

$$n = \frac{-13 \pm \sqrt{349}}{-10} = \frac{-13 \pm 18}{-10} \to n = -\tfrac{1}{2}, \quad n = 3,1\ldots$$

veo que b_n es creciente a partir de $n=4$.

faltaría decir que tiene esta pinta



Veo que pasa cuando tomo límite.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{81}{n^2}}_{0} - \underbrace{\frac{45}{n}}_{0} - 6 = \boxed{-6}$$

• Conclusión: b_n comienza en 30, luego decrece hasta $-12,1875$ (b_4) y finalmente es siempre creciente acercándose a -6.

$A = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\Rightarrow$ $\sup(A) = 30$

$\inf(A) = -12,1875$

JONATHAN
SEIJO.

③ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = \left(\ln(2y-3x) + y \cdot x^2 \ ,\ \operatorname{sen}(y+1) \cdot e^{y(x+1)} \right)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable

$\nabla(g \circ F)(-1,-1) = (-2 \ \ 2)$

- Calcular la derivada direccional $\frac{\partial g}{\partial v}(-1,0)$

para la dirección $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1}{2} \right)$

$\nabla(g \circ F)\Big|_{(-1,1)} = Dg\Big|_{(F(-1,1))} \cdot DF\Big|_{(-1,1)} = (-2 \cdot 2)$

$\cancel{\quad} = \cancel{\quad}$

$$DF\Big|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y-3x} \cdot (-3) + 2xy & \frac{1}{2y-3x} \cdot 2 + x^2 \\ \operatorname{sen}(y+1) \cdot e^{yx+y} \cdot y & \cos(y+1) \cdot e^{yx+y} + \operatorname{sen}(y+1) \cdot e^{yx+y} \cdot (x+1) \end{pmatrix}$$

$\cancel{\quad}\Big|_{(-1,-1)} = \cancel{\quad}$

$$DF\Big|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-2+3}(-3)+2 & \frac{1}{-2+3} \cdot 2 + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F(-1,-1) = (-1,0)$

$$Dg\big|_{F(-1,-1)} = Dg\big|_{(-1,0)} = \left(g_x \quad g_y\right)\big|_{(-1,0)}$$

$$\Rightarrow D(g\circ F)_{(-1,-1)} = Dg\big|_{(-1,0)} \cdot DF\big|_{(-1,-1)} = (-2 \quad 2)$$

$$= (g_x \quad g_y)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \quad 2)$$

$$= (-g_x \ , \ 3g_x + g_y) = (-2, 2)$$

$$\boxed{\begin{matrix} g_x\big|_{(-1,0)} \\ g_y\big|_{(-1,0)} \end{matrix}}$$

$-g_x = -2$

$\Rightarrow \underline{g_x = 2}$ ✓

$3 \cdot g_x + g_y = 2$

$3 \cdot 2 + g_y = 2$

$\underline{g_y = -4}$ ✓

quiero calcular $\frac{\partial g}{\partial v}(-1,0)$ con $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(-1,0) = \left\langle \nabla g_{(-1,0)}, v \right\rangle$$

esto vale xq' g es diferenciable

$$= (2, -4) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

$$= \boxed{\sqrt{3} + 2 = \frac{\partial g}{\partial v}(-1,0)}$$ ✓

NOTA

JONATHAN SEIJO.

④ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

su polinomio de Taylor de orden 2 en $(-1,0)$ es

$$P(x,y) = x.y - y + 1$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = e^{x.F(x+1,3y)+2}$$

Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $(-2,0)$

· Consigo información de F usando su pol. de Taylor

$F(-1,0) = 1$ $\qquad$ $F_{xx}(-1,0) = 0$

$F_x(-1,0) = 0$ $\qquad$ $F_{xy}(-1,0) = 1$

$F_y(-1,0) = -1$ $\qquad$ $F_{yy}(-1,0) = 0$

×

ojo! como no está centrado en cero

$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x+1) + f_y y$

$+ \frac{1}{2} f_{xx}(x+1) + \frac{1}{2} f_{yy}\, y + f_{xy}(x+1)y$

$= f(x_0,y_0) + f_x.(x+1) + (f_y + f_{xy})y +$

$f_{xy}.xy + \frac{1}{2}(f_{xx}(x+1) + f_{yy}\,y)$

$\Rightarrow f_{xy} = 1$ y $f_y + f_{xy} = -1$

$f_y = -2$

Luego hallar polinomio de g en $(-2,0)$.

$$P_{2g} = g(-2,0) + g_x(-2,0)(x+2) + g_y(-2,0)\,y + \frac{1}{2}\left[g_{xx}(-2,0)(x+2)^2 + 2g_{xy}(-2,0)(x+2)y + g_{yy}(-2,0)y^2 \right]$$

$$g(x,y) = e^{x.F(x+1,3y)+2}$$

$$\left[g(-2,0) = e^{(-2).F(-1,0)+2} = e^{-2+2} = e^0 = 1 \right] ✓$$

(sigo otra)

$$\boxed{f(x,y) = e^{x \cdot F(x+1,\, 3y) + 2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x \big|_{(x+1,\, 3y)} \\ F_y \big|_{(x+1,\, 3y)} \end{array} \right.$$

$$f_x(x,y) = e^{xF(x+1,\,3y)+2} \cdot \left(1 \cdot F(x+1, 3y) + x \cdot \frac{\partial (F(x+1, 3y))}{\partial x} \right)$$

$$f_x(x,y) = e^{x \cdot F(x+1,\,3y)+2} \cdot \left(F(x+1, 3y) + x \left(F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 \right) \right)$$

$$f_x(x,y) = e^{x \cdot F(x+1,\,3y)+2} \cdot \left(F(x+1, 3y) + x \cdot F_x \right)$$

$$\left[f_x(-2,0) = e^0 \cdot (1 + 0) = 1 \right]$$

$$f_y(x,y) = e^{x \cdot F(x+1,\,3y)+2} \cdot \left(x \cdot \frac{\partial (F(x+1, 3y))}{\partial y} \right)$$

$$= e^{xF(x+1,\,3y)+2} \cdot \left(x \left(F_x \cdot 0 + F_y \cdot 3 \right) \right)$$

$$f_y(x,y) = e^{x \cdot F(x+1,\,3y)+2} \cdot 3x F_y$$

$$\left[f_y(-2,0) = e^0 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-1) = 6 \right]$$

(-2) 12 anastra error

$$f_x = e^{x \cdot F(x+1,\,3y)+2} \cdot \left(F(x+1, 3y) + x \cdot F_x \right)$$

$$f_{xx} = e^{xF(x+1,\,3y)+2} \left(F(x+1, 3y) + x \cdot F_x \right) \cdot \left(F(x+1, 3y) + x F_x \right) +$$

$$+ e^{xF(x+1,\,3y)+2} \left(\underset{(*)}{\frac{\partial (F(x+1, 3y))}{\partial x}} + \left(1 \cdot F_x + x \frac{\partial F_{x*}}{\partial x} \right) \right)$$

$$\left[f_{xx}(-2,0) = e^0 \cdot (1+0) \cdot (1+0) + e^0 \cdot \left(0 + (0 + 0) \right) = 1 \right]$$

$$(*) \quad \frac{\partial (F(x+1, 3y))}{\partial x} = \left| F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 \right) = F_x \big|$$

JONATHAN
SEIJO.

$$g_x = e^{x.F(x+1,3y)+2} . \left(F(x+1,3y) + xF_x \right)$$

$$g_{xy} = e^{xF(x+1,3y)+2} . \left(x . \frac{\partial(F(x+1,3y))}{\partial y}\right) . \left(F(x+1,3y) + xF_x\right) +$$
$$+ e^{xF(x+1,3y)+2} . \left(\frac{\partial(F(x+1,3y))}{\partial y} + x . F_{xy}.3 \right)$$

~~g_{xx}~~

$$g_{xy} = e^{xF(x+1,3y)+2} . (x . (F_x.0 + F_y.3)) . (F(x+1,3y) + x.F_x) +$$
$$+ e^{x.F(x+1,3y)+2} . ((0 + F_y.3) + x . F_{xy}.3)$$

$$\left[g_{xy}(-2,0) = e^0 . (-2 . (-3)) . (1+0) + + e^0 . (-3) + 0 = 3 \right]$$

$$g_y = e^{x.F(x+1,3y)+2} . 3x.F_y$$

$$g_{yy} = e^{x.F(x+1,3y)+2} . (3xF_y)^2 +$$
$$+ e^{xF(x+1,3y)+2} . 3xF_{yy}.3$$

$$\left[g_{yy}(-2,0) = e^0 . (6)^2 + e^0 . 0 = 36. \right]$$

- Armo el polinomio de Taylor de g en $(-2,0)$.

$$P_{2g} = g(-2,0) + g_x(-2,0)(x+2) + g_y(-2,0)y +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[g_{xx}(-2,0)(x+2)^2 + 2g_{xy}(-2,0)(x+2)y + g_{yy}(-2,0)y^2 \right]$$

$$\boxed{P_{2g} = 1 + (x+2) + 6y + \frac{1}{2}\left[(x+2)^2 + 6(x+2)y + 36y^2 \right]}$$