1	2	3	4	Calificación
B	B-	B	R	A

Tema 2

APELLIDO Y NOMBRE: TURNO:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Segundo Parcial - 26/11/2016

---

1. Dada $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad F(x, y) = x^3 - x(y + 1) + y^2$:

   a) Probar que existen $I, J \subset \mathbb{R}$ entornos del 0 y una función $\phi : I \to J$, de tipo $C^1(I)$ con $\phi(0) = 0$ tal que $F(\phi(y), y) = 0$ para todo $y \in I$.

   b) Expresar $\phi'(y)$ en términos de y y $\phi(y)$ para todo $y \in I$.

   c) Si se define en un entorno de $p = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ la función

   $$g(x, y) = \phi(y + x^2) + xe^{y+1},$$

   calcular su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de p.

2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y, 2x^2 + y^2 \leq 120\}$ y $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 + 4x$.

   a) Hallar los puntos críticos de f en el interior de D y decidir si son máximos, mínimos locales o puntos silla.

   b) Hallar, si existen, los máximos y mínimos absolutos de f en D.

3. Decidir para que valores $p \in \mathbb{R}$ no negativos la siguiente integral converge:

   $$\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-x})(1 + x)}{x\sqrt{x^{p+2} + 7x^{p+1} + 4x^p}}\, dx.$$

   Observación: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$

4. Calcular el volumen de

   $$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y^2 + z^2 \leq 2, y^2 + z^2 \leq x \leq 4 - y^2 - z^2, 0 \leq z \leq y\right\}.$$

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1. a) Como F es C^∞ en $\mathbb{R}^2$, es en particular C^1. Observo que $F_x(0,0)$ no se anula, ~~ya que~~ en el punto $(0,0)$:

$F_x(x,y) = 3x^2 - y - 1$, $F_x(0,0) = -1$. ✓

Entonces, puede aplicarse el Teorema de la función implícita, que asegura la existencia de dos entornos abiertos del 0: I, J y una función $\phi: I \to J$, $\phi \in C^1(I)$ tal que $\phi(y) = x$ $\forall y \in I$, en particular $\phi(0) = 0$. Esta función ϕ cumple que $F(\phi(y), y) = 0$. ✓

b) Necesito $\nabla F(x,y)$.

$\nabla F(x,y) = (3x^2 - y - 1,\ 2y - x)$

$$\phi'(y) = -\frac{F_y(\phi(y), y)}{F_x(\phi(y), y)} = \frac{-(2y - \phi(y))}{3(\phi(y))^2 - y - 1} = \frac{\phi(y) - 2y}{3(\phi(y))^2 - y - 1}$$ ✓

c) Necesito $\phi''(y)$.

$$\phi''(y) = \frac{(\phi'(y) - 2)(3(\phi(y))^2 - y - 1) - (\phi(y) - 2y)(6\phi(y)\cdot\phi'(y) - 1)}{(3(\phi(y))^2 - y - 1)^2}$$

$\phi''(0) = 2$, pues $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = 0$.

Observo que $y + x^2 = 0$ si $(x,y) = (1,-1)$.

$g_x(x,y) = \phi'(y+x^2)\cdot 2x + e^{y+1}$, $g_x(1,-1) = 1$

$g_y(x,y) = \phi'(y+x^2) + xe^{y+1}$, $g_y(1,-1) = 1$

$g_{xx}(x,y) = 2\left(\phi'(y+x^2) + \phi''(y+x^2)\cdot 2x^2\right)$, $g_{xx}(1,-1) = 8$

$g_{xy}(x,y) = 2x\,\phi''(y+x^2) + e^{y+1} = g_{yx}(x,y)$, $g_{xy}(1,-1) = 5$

$g_{yy}(x,y) = \phi''(y+x^2) + x e^{y+1}$, $g_{yy}(1,-1) = 3$

Luego, el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $(1,-1)$ es:

$$P(x,y) = \underset{\overset{\parallel}{1}}{g(1,-1)} + 1.(x-1) + 1.(y+1) + \frac{1}{2}\left[8(x-1)^2 + 2.5(x-1)(y+1) + 3(y+1)^2\right]$$ ✓

y $g(1,-1) = \phi(0) + 1.e^0 = 1$.

(2) a) Busco puntos críticos:

$\nabla f(x,y) = (4x-4y+4, -4x+2y)$

$$\begin{cases} 4(x-y+1)=0 \longrightarrow \text{I} \\ 2(-2x+y)=0 \longrightarrow \text{II} \end{cases}$$

I $y = x+1$. Reemplazo en II $-2x+x+1=0$

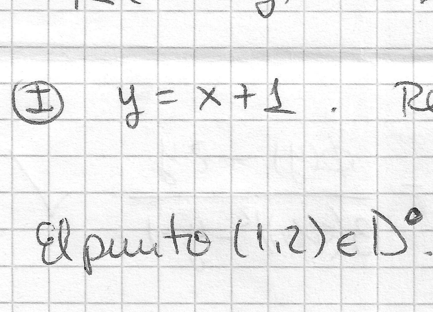
$\boxed{1=x} \Longrightarrow \boxed{y=2}$ ✓

El punto $(1,2) \in D^\circ$.

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(Hf(1,2)) = 8-16 = -8 < 0$. Luego $Hf(1,2)$ es indefinida y, por Criterio del Hessiano, $(1,2)$ es punto silla. ✓

b)



Como D es compacto y f es continua en D, f va a alcanzar máximo y mínimo absolutos. ✓

Primero busco puntos en la restricción: $\{2x^2+y^2=120\} = D_1$

Tomo $g(x,y)=2x^2+y^2-120$.

$\nabla g(x,y)=(4x,2y) \longrightarrow$ se anula en $(0,0) \in \partial D$. Lo voy a tener en cuenta.

pero no es el borde de la elipse que es lo que te interesa en este caso.

Si $(x,y)\neq(0,0)$:

$$4(x-y+1)\cdot 2y = 2(-2x+y)\,4x$$

$$xy-y^2+y = -2x^2+yx$$

$$y^2-y = 2x^2$$

Uso la ecuación de D_1.

$$y^2-y+y^2=120.$$

$$2y^2-y-120=0 \;\Rightarrow\; y=8, \quad y=-\frac{15}{2}.$$

Descarto $y=-\frac{15}{2}$ pues no cumple $x^2\leq y$. ✓

Si $y=8$:

$$2x^2 = 8^2+8 = 56.$$

$$x^2=28 \iff x=\pm 2\sqrt{7}.$$

Los puntos $(2\sqrt7,8),(-2\sqrt7,8)\notin D$. ✓

Ahora busco puntos en la restricción $\{x^2=y\}=D_2$.

Parametrizo la parábola. Son los puntos (x,x^2).

$$f(x,x^2)=2x^2-4x^3+x^4+4x = \cancel{4(x^3-3x^2+x+1)} = \alpha(x)$$

~~quiero~~ busco los puntos que cumplan:

$\alpha'(x)=0$.

$\mathcal{L}'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x + 4 = 4(x^3 - 3x^2 + x + 1)$

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ sii $x = 1,\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$.

Tengo los puntos $(1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})^2) \in D$
$(1-\sqrt{2}, (1-\sqrt{2})^2) \in D$
$(1, 1) \in D$.

Agrego los puntos de la intersección de D_1 y D_2:

$$\begin{cases} x^2 = y \\ 2x^2 + y^2 = 120 \end{cases} \longrightarrow 2y + y^2 = 120 \longrightarrow y^2 + 2y - 120 = 0 \begin{cases} y = 12 \\ y = -10 \end{cases}$$

no va a pertenecer a D

al revés te quedaba $y = 12$, $\boxed{y = 10}$

Puntos: $(2\sqrt{3}, 12)$, $(-2\sqrt{3}, 12)$ ✗ te quedaba $(-\sqrt{10}, 10)$, $(\sqrt{10}, 10)$

Finalmente, evalúo.

$f(0,0) = 0$ no $\quad f(1,1) = 3 \quad f(1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})^2) = -1$

$f(2\sqrt{3}, 12) \approx 15 \quad f(1-\sqrt{2}, (1-\sqrt{2})^2) = -1$ ✓

$f(-2\sqrt{3}, 12) \approx 320$.

te quedaba $(-\sqrt{10}, 10)$ máx abs.

f tiene máximo absoluto en $(-2\sqrt{3}, 12)$ y mínimo en $(1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})^2)$, $(1-\sqrt{2}, (1-\sqrt{2})^2)$.

(3) Divido la integral ~~en~~ desde 0 hasta 1 y desde 1 hasta $+\infty$.

(A) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-e^{-x})}{x} \cdot \frac{(1+x)}{x^{p/2}\sqrt{x^2+7x+4}}\,dx$

$$\frac{(1-e^{-x})}{x} \cdot \frac{(1+x)}{x^{p/2}\sqrt{x^2+7x+4}} : \frac{1}{x^{\alpha}} = \underbrace{\frac{(1-e^{-x})}{x}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1} \frac{(1+x)\,\cancel{x^{\alpha}}}{\cancel{x^{p/2}}\sqrt{x^2+7x+4}} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{4}$$

con $\alpha = p/2$

Falta ~~observar~~ que poder aplicar este criterio porque las 2 funciones son ~~no~~ positivas $(f, g \geq 0)$

Por criterio de comparación vía límite, la integral (A) converge sii $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge, lo que sucede si

$\alpha = \frac{p}{2} < 1$. Entonces, (A) converge si $p<2$. ✓

(B) $$\int_1^{+\infty} \frac{(1-e^{-x})(1+x)}{x \cdot x^{\frac{p+2}{2}}\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}}\,dx$$

con $\beta=\frac{p+2}{2}$

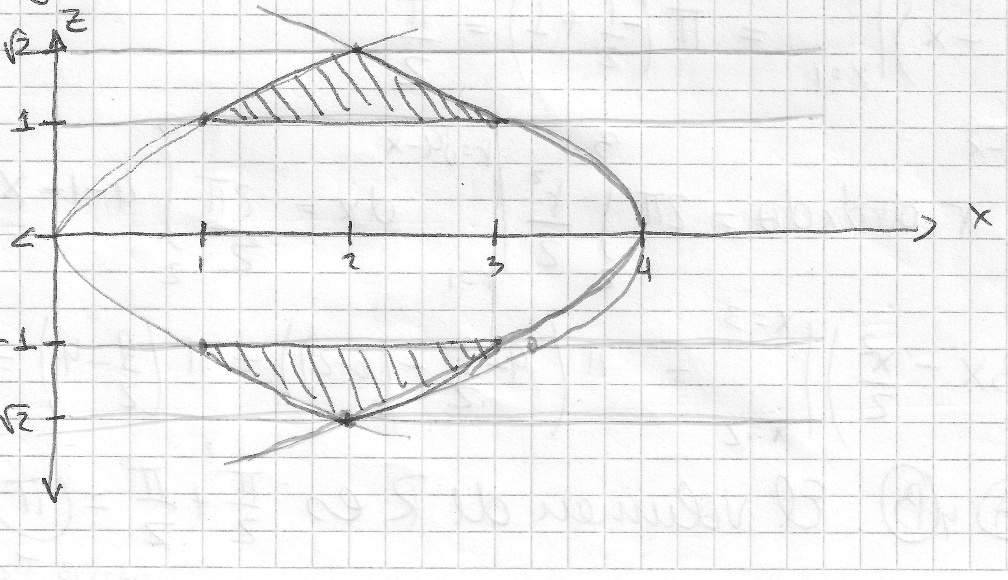
$$\frac{(1-e^{-x})\,\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\cancel{x}\cdot x^{\frac{p+2}{2}}\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}} : \frac{1}{x^\beta} = \frac{(1-e^{-x})\left(\frac{1}{x}+1\right)\cancel{x^\beta}}{\cancel{x^{\frac{p+2}{2}}}\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}} \xrightarrow{x\to+\infty} \boxed{1} \neq 0$$

Por el mismo criterio anterior, (B) converge sii $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\beta}\,dx$ converge, que sucede si $\beta=\frac{p+2}{2}>1$.

Entonces (B) converge si $p>0$.

Para que la integral original converja, deben converger (A) y (B). Luego, la integral converge si $p\in(0;2)$ ✓

(4) Voy a dibujar R. en el plano xz.



La línea naranja representa la ecuación $x = y^2+z^2$.
La celeste, a $x = 4-y^2-z^2$ y los verdes a $y^2+z^2=1$ y
y ~~los~~ $y^2+z^2=2$. (cilindros).

- $x = y^2+z^2$ se interseca con el cilindro de radio 1 en $x=1$ y con el de radio $\sqrt{2}$ en $x=2$.
- $4-y^2-z^2 = x$ se interseca con el cilindro de radio 1 en $x=3$ y con el de radio $\sqrt{2}$ en $x=2$.

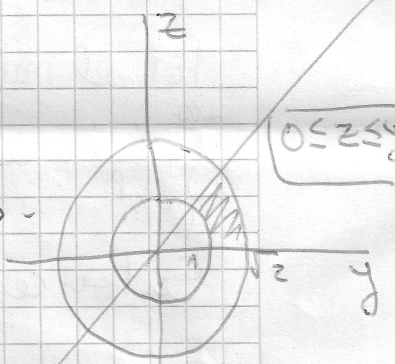
Para calcular el volumen, voy a hacer un cambio de variables a coordenadas cilíndricas. (R es acotado)

$(x, \cos\theta \cdot r, r \cdot \operatorname{sen}\theta) = F(x,\theta,r)$ (F es C^1 y su Jacobiano $\neq 0$)

$1 \le x \le 3$, $0 \le \theta < 2\pi$, ~~$\sqrt{x} \le x \le \sqrt{4-x}$~~

r se mueve entre 1 y $\sqrt{x}$ si $1 \le x < 2$
1 y $\sqrt{4-x}$ si $2 \le x \le 3$.

$0 \le \theta \le \pi/4$



$\boxed{0 \le z \le y}$

Voy a partir la integral en dos:

(A) $$\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_1^{\sqrt{x}} r \, dr\,dx\,d\theta = 2\pi \int_1^2 \left(\frac{r^2}{2}\Big|_{r=1}^{r=\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2\pi}{2}\int_1^2 x-1 \, dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(B) $$\int_0^{2\pi}\int_2^3\int_1^{\sqrt{4-x}} r \, dr\,dx\,d\theta = 2\pi\int_2^3 \frac{r^2}{2}\Big|_{r=1}^{r=\sqrt{4-x}} dx = \frac{2\pi}{2}\int_2^3 4-1-x \, dx =$$

$$= \pi\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=2}^{x=3} = \pi\left(9-\frac{9}{2}-(6-2)\right) = \pi\left(\frac{9}{2}-4\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Sumo (A) y (B). El volumen de R es $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.

(debía $\pi/8$)

encontró muy mal la región en el plano yz