1	2	3	4
25	25	25	25

CALIFICACIÓN
100!

A!

TEMA 1

Probabilidad y Estadística (C)

Primer Parcial - 19/05/2016

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una.*

[redacted]

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos o tener al menos dos ejercicios bien resueltos.

En los ejercicios donde corresponda, recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (*25 puntos*) Se tiene un dado con la siguiente propiedad: el número 1 y el 6 tienen probabilidad 3/10 de salir y la probabilidad de que salga cada uno de los números del 2 al 5 es 1/10. Se tienen además dos urnas: la urna A tiene 3 bolitas blancas y 3 bolitas negras; la urna B tiene 3 bolitas blancas y 5 bolitas negras. Se tira una vez el dado. Si el resultado es un múltiplo de 2, se extraen dos bolitas **con reposición** de la urna A. Si el resultado es un múltiplo de 3, se extraen dos bolitas **sin reposición** de la urna B. Observar que si el número que sale no es múltiplo de 2 ni de 3 entonces no se extrae ninguna bolita de ninguna urna y si el número que sale es múltiplo de 2 y de 3 entonces se hacen las extracciones en ambas urnas.

a) (*6 puntos*) Si se hicieron extracciones de ambas urnas, ¿cuál es la probabilidad de haber extraído en total exactamente una bolita blanca?

b) (*7 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído en total exactamente una bolita blanca?

c) (*5 puntos*) Sabiendo que se obtuvo exactamente una bolita blanca, hallar la probabilidad de que en el dado haya salido el número 4.

d) (*7 puntos*) Decidir si son independientes los eventos "salió el número 4 en el dado" y "en total se extrajo exactamente una bolita blanca".

2. (*25 puntos*) Una empresa de transporte envía camiones cargados de mercadería. La probabilidad de que envíe exactamente dos camiones en un día es 0.3 y se sabe que puede enviar como máximo dos camiones en un día (es decir, puede enviar 0, 1 ó 2 por día). Se conoce además, que la varianza del número de camiones enviados en un día es 0.36.

a) (*10 puntos*) Hallar la función de probabilidad puntual de la cantidad de camiones enviados en un día.

b) (*5 puntos*) Una semana (5 días) se dice *curiosa* si hubo exactamente tres días en los cuales se enviaron dos camiones. Sabiendo que la cantidad de camiones enviados en distintos días es independiente, determinar la probabilidad de que una semana sea curiosa.

c) (*5 puntos*) Hallar la probabilidad de que en el transcurso de cinco semanas hayan habido exactamente dos semanas curiosas.

d) (*5 puntos*) Hallar la probabilidad de que la segunda semana curiosa haya ocurrido recién en la quinta semana.

3. (*25 puntos*) Santi va a la escuela todas las mañanas. Cuando su mamá lo lleva en auto, el tiempo que tarda en llegar (en minutos) es una variable aleatoria con distribución $U[1,3]$. Cuando su mamá no lo lleva se va caminando y el tiempo que tarda (en minutos) es una variable aleatoria continua con densidad

$$g(x) = (a + bx)I_{[1,3]}(x).$$

La probabilidad de que la madre lo lleve a la escuela en auto es $1/2$. Se sabe, además, que la probabilidad de que Santi tarde 2 minutos o menos en llegar a la escuela es $15/32$.

a) (*10 puntos*) Probar que $a = 1/4$ y $b = 1/8$.

b) (*10 puntos*) Si X es la variable aleatoria que indica el tiempo que tarda Santi en llegar a la escuela, hallar la función de densidad de X.

c) (*5 puntos*) Suponer que la elección del medio de transporte de Santi es independiente cada día con respecto al resto. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana escolar (5 días) haya habido al menos un día en el que Santi tarde 2 minutos o menos en llegar a la escuela?

La densidad de una variable aleatoria $Y \sim U[a,b]$ *es* $f_Y(y) = \frac{1}{b-a}I_{[a,b]}(y)$, *su esperanza es* $E(Y) = \frac{a+b}{2}$ *y su varianza* $V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

4. (*25 puntos*) Se sabe que la distribución condicional de X dado que $Y = y$ tiene densidad

$$f_{X|Y=y}(x) = e^{-x+y}I_{(y,+\infty)}(x)$$

y que Y tiene distribución exponencial de parámetro 2.

a) (*5 puntos*) Hallar la función de densidad conjunta de (X, Y).

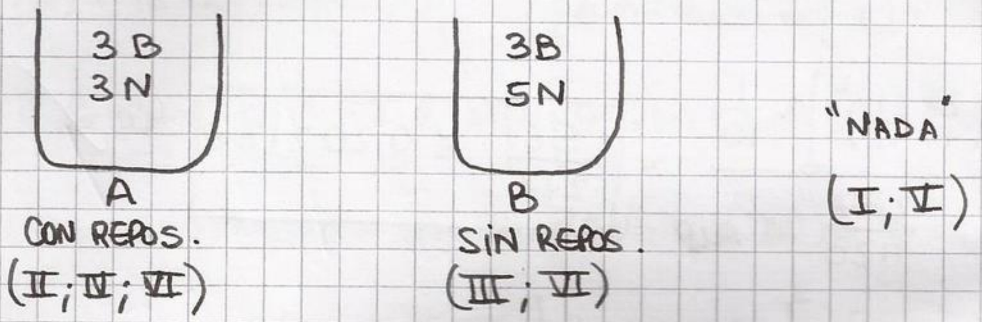
b) (*10 puntos*) Calcular $P(2Y \geq X)$.

c) (*10 puntos*) Calcular $f_X(x)$.

La densidad de una variable aleatoria $Z \sim exp(\lambda)$ *es* $f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z}I_{[0,\infty)}(z)$, *su esperanza es* $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$ *y su varianza es* $V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$.

① Sean los eventos "i" en números romanos que significan {salió el número "i" en el dado}.

- $\mathbb{P}(\mathrm{I}) = \mathbb{P}(\mathrm{VI}) = \frac{3}{10}$
- $\mathbb{P}(\mathrm{II}) = \mathbb{P}(\mathrm{III}) = \mathbb{P}(\mathrm{IV}) = \mathbb{P}(\mathrm{V}) = \frac{1}{10}$



a) Notemos que el evento {se extrajo de ambas urnas} = VI.
Luego, busco $\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{VI})$.

- $\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{VI}) = \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca y de A}\} \mid \mathrm{VI})$
  $+ \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca y de B}\} \mid \mathrm{VI})$

▶ $\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca y de A}\} \mid \mathrm{VI}) = \left[\binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}\right] = \frac{5}{28}$

▶ $\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca y de B}\} \mid \mathrm{VI}) = \left[\binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}\right] = \frac{15}{112}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{VI}) = \frac{5}{28} + \frac{15}{112} = \boxed{\frac{5}{16}}$

b) • $\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\}) = \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{VI}) . \mathbb{P}(\mathrm{IV})$
$+ \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{II} \cup \mathrm{IV}) . \mathbb{P}(\mathrm{II} \cup \mathrm{IV})$
$+ \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{III}) . \mathbb{P}(\mathrm{III})$
$+ \mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \mathrm{I} \cup \mathrm{V}) . \mathbb{P}(\mathrm{I} \cup \mathrm{V}) =$

NOTA

$$= \frac{5}{16}\cdot\frac{3}{10} + \left[\binom{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right) + \left[\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\right]\cdot\frac{1}{10} + 0$$

$$= \boxed{\frac{277}{1120} \cong 0{,}24732}$$

c) • $\mathbb{P}(\text{IV} \mid \{\text{una bola blanca}\}) = \dfrac{\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \cap \text{IV})}{}$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\} \mid \text{IV}) \cdot \mathbb{P}(\text{IV})}{\mathbb{P}(\{\text{una bola blanca}\})} =$$

$$= \frac{\left[\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{10}}{\frac{277}{1120}} = \boxed{\frac{56}{277} \cong 0{,}202166}$$

d) De ser independientes se cumplirá que $\mathbb{P}(\text{IV}) = \mathbb{P}(\text{IV} \mid \{\text{una bola blanca}\})$.
Pero como se vio en el ejercicio "c)", $\mathbb{P}(\text{IV} \mid \{\text{una bola blanca}\}) = \frac{56}{277}$,
y se sabe que $\mathbb{P}(\text{IV}) = \frac{1}{10}$.
Luego, no son independientes.

Muy bien!

NOTA

[redacted]

FECHA 19.05.16

② Sea la v.a. discreta $X = \#$ camiones por día.

Se sabe que $\mathbb{P}(x=2) = P_x(2) = 0,3$. (con $P_x(x)$ la prob. puntual de x)

Se sabe que $R(x) = \{0;1;2\}$

Se sabe que $V(x) = 0,36$.

a) • $V(x) = \mathbb{E}(x^2) - [\mathbb{E}(x)]^2 = \sum_{x=0}^{2} x^2 . P_x(x) - \left[\sum_{x=0}^{2} x . P_x(x)\right]^2$

$= \left[0^2 . P_x(0) + 1^2 . P_x(1) + 2^2 . P_x(2)\right] - \left[0 . P_x(0) + 1 . P_x(1) + 2 . P_x(2)\right]^2$

Ahora, reemplazando con los datos que se tienen: ✓

• $V(x) = 0,36 = P_x(1) + 4 . 0,3 - \left[P_x(1) + 2 . 0,3\right]^2 = P_x(1) + 1,2 -$
$\left[P_x(1)^2 + 1,2 . P_x(1) + 0,36\right] = -P_x(1)^2 - 0,2 . P_x(1) + 0,84 = 0,36$

$\Leftrightarrow -P_x(1)^2 - 0,2 . P_x(1) + 0,48 = 0 \Rightarrow P_x(1) = \frac{3}{5}$ ó $P_x(1) = \frac{-4}{5}$ ✓

Pero como $P_x(1)$ representa una probabilidad, debe ser mayor o igual a cero. $\Rightarrow P_x(1) = \frac{3}{5}$ ✓

Ahora, como $P_x(0) + P_x(1) + P_x(2)$ debe sumar 1, sé que:

• $P_x(0) + \frac{3}{5} + 0,3 = 1 \Leftrightarrow P_x(0) = \frac{1}{10}$ ✓

$$\Rightarrow \boxed{P_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } x=0 \\ \frac{3}{5} & \text{si } x=1 \\ \frac{3}{10} & \text{si } x=2 \end{cases}}$$ ✓

b) Sea $D = \#$ días en una semana que envían 2 camiones. ✓

Así modelada, $D \sim B(5, p)$; donde $p = \mathbb{P}(X=2) = 0,3$

$\Rightarrow$ Busco $\mathbb{P}(\{$la semana es curiosa$\}) = \mathbb{P}(D=3) = \binom{5}{3} . p^3 . (1-p)^2 = \boxed{\frac{1323}{10000}}$

NOTA

c) Sea $M = \#$ semanas curiosas en 5.

Así, $M \sim B(5, q)$; con $q = \mathbb{P}(D=3) = \frac{1323}{10000}$

$\Rightarrow$ Busco $\mathbb{P}(M=2) = \binom{5}{2} \cdot q^2 \cdot (1-q)^3 \simeq \boxed{0{,}1143479757}$

d) Sea $N = \#$ semanas hasta que 2 sean curiosas.

Así, $N \sim BN(2, q)$; con $q = \mathbb{P}(D=3) = \frac{1323}{10000}$

$\Rightarrow$ Busco $\mathbb{P}(N=5) = \binom{4}{1} \cdot q^2 \cdot (1-q)^3 \simeq \boxed{0{,}04573919}$

Muy bien

[redacted] HOJA N° 3/6
FECHA 19·05·16

③ Sean las v.a.:

- Y = minutos que tarda cuando lo lleva mamita. JA
- Z = minutos que tarda cuando camina.
- X = minutos que tarda

Se sabe que $Y \sim \mathcal{U}[1;3]$, y que la densidad de Z es:

$$g_Z(z) = (a + bz) \cdot \mathbb{1}_{[1;3]}(z)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[1;3]}(y)$$ es la densidad de Y.

Sean los eventos:

crack

- $V_Y = \{$lo lleva la mamita$\} \Rightarrow \mathbb{P}(V_Y) = \frac{1}{2}$
- $V_Z = \{$va caminando$\}$; suponiendo que $V_Y^c = V_Z \Rightarrow \mathbb{P}(V_Z) = \frac{1}{2}$

a) Para que $g_Z(z)$ sea una densidad, debe cumplir que:

- $g_Z(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} g_Z(z)\, dz = 1$.

Para hallar posibles a y b, buscaré que se satisfaga lo segundo, en un principio:

- $$\int_{\mathbb{R}} g_Z(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} (a+bz) \cdot \mathbb{1}_{[1;3]}(z)\, dz = \int_1^3 (a+bz)\, dz = \left(az + \frac{b}{2}z^2\right)\Big|_1^3$$

$$= 3a + b\frac{9}{2} - a - \frac{b}{2} = 2a + 4b = 1$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, pero también sé que debe cumplirse que $\mathbb{P}(X<2) = \frac{15}{32}$

NOTA

$$\bullet\ \mathbb{P}(X<2) = \mathbb{P}(X<2|V_Y)\cdot\mathbb{P}(V_Y) + \mathbb{P}(X<2|V_Z)\cdot\mathbb{P}(V_Z)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\,dy + \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{2} g_Z(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\,dz + \frac{1}{2}\int_{1}^{2}(a+bz)\,dz$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[az + \frac{b}{2}z^2\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[2a+2b-a-\frac{b}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[a+\frac{3}{2}b\right] = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + \frac{3}{4}b = \frac{15}{32}$$

$$\Longleftrightarrow\ 1+2a+3b = \frac{15}{8} \Longleftrightarrow 2a+3b = \frac{7}{8}$$ ✓

Ahora sí, tengo una solución única:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ 2a+3b=\frac{7}{8}\\ \bullet\ 2a+4b=1\end{array}\right] \Longleftrightarrow\ a=\frac{1}{4}\ \text{ y }\ b=\frac{1}{8}$$ ✓ ✓ Muy bien

Nótese que para estos a y b, $g_Z(z)\geq 0\ \forall z\in\mathbb{R}$.

b) Por algo parecido a lo hecho en el punto "a", sé que:

$$\bullet\ \mathbb{P}(X<x) = \mathbb{P}(X<x|V_Y)\cdot\mathbb{P}(V_Y) + \mathbb{P}(X<x|\ \ )\cdot\mathbb{P}(V_Z)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy + \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{x} g_Z(z)\,dz$$

~~▸ Si $x<1$ ⇒ $F_X(x)=0$, donde $F_X(x)=\mathbb{P}(X<x)$. Allí defino $f_X(x)=0$; siendo $f_X(x)$ la densidad de X.~~

~~▸ Si $x>3$ ⇒ $F_X(x)=1$. Allí defino $f_X(x)=0$.~~

~~▸ Si $x\in[1;3]$ (las integrales de arriba no son cero), puedo derivar $F_X(x)$ y obtener $f_X(x)$:~~

ANULADO

Ok.

Sea $F_X(x)=\mathbb{P}(X<x)$, se sabe que $\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x)$, donde $f_X(x)$ es la densidad de X.

NOTA

[redacted]

HOJA Nº 4/6

FECHA 19.05.16

- $F_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} g_Z(z)\,dz$

$\Rightarrow f_X(x) = F_X'(x) = \left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy\right]' + \left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} g_Z(z)\,dz\right]'$

$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot f_Y(x) + \frac{1}{2} \cdot g_Z(x)}$

Recordemos que:

- $f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[1;3]}(y)$
- $g_Z(z) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot z\right) \cdot \mathbb{1}_{[1;3]}(z)$

✓ (podías escribir cómo quedaba f)

c) Sea $D = \#$días en 5 que tardó menos de 2 minutos.

Luego, $D \sim B(5, p)$; con $p = \mathbb{P}(X \leq 2) = \frac{15}{32}$

$\Rightarrow$ Busco $\mathbb{P}(\{$al menos un día tardó menos de 2 minutos$\})$

$= \mathbb{P}(D \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(D < 1) = 1 - \mathbb{P}(D = 0) = 1 - P_D(0)$

$= 1 - (1-p)^5 \cong \boxed{0,957685}$ ✓ perfecto

[redacted]

HOJA Nº 5/6

FECHA 19/05/16

④ Nota: adoptaré como notación genérica, dada una v.a. Z continua:

- $f_Z(z)$ es la densidad de Z
- $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$; la acumulada de Z.

- $f_{X|Y=y}(x) = e^{-x+y} \cdot \mathbb{1}_{(y;+\infty)}(x)$

- $f_Y(y) = 2e^{-2y} \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(y)$

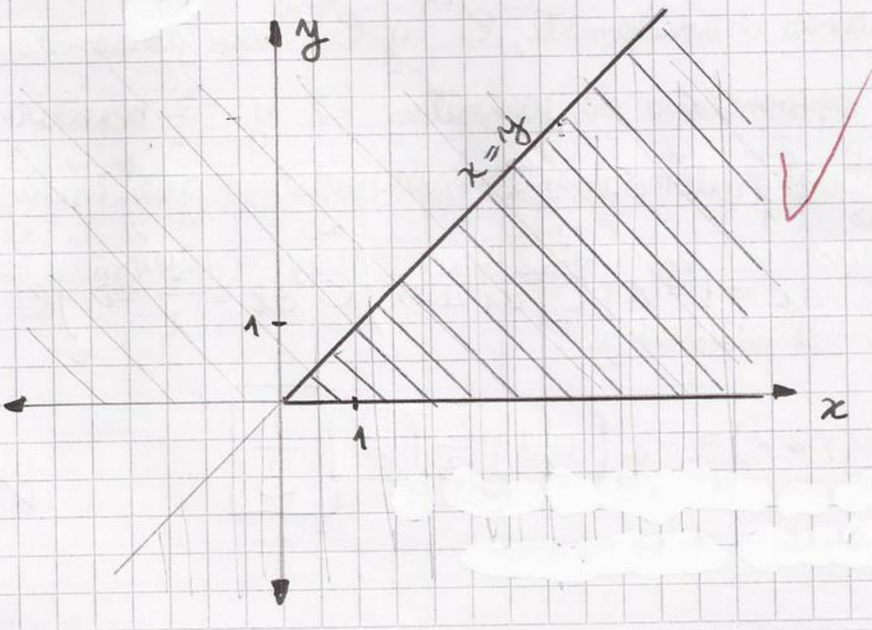
a) Por definición, sé que:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \iff f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$$

Luego, $f_{XY}(x,y) = e^{-x+y} \cdot 2e^{-2y} \cdot \mathbb{1}_{(y;+\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(y)$

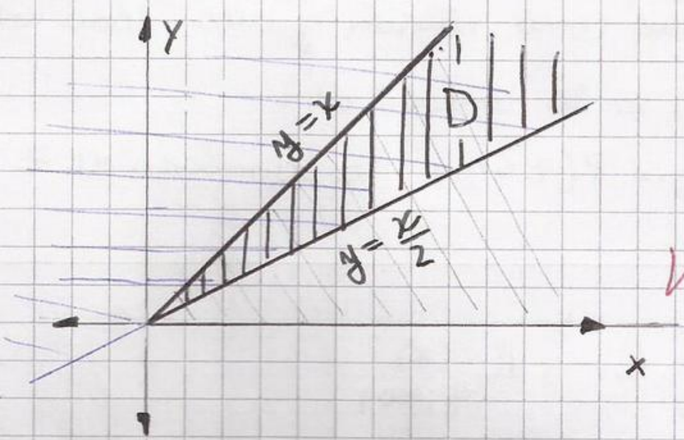
$$\boxed{f_{XY}(x,y) = 2\, e^{-x-y} \cdot \mathbb{1}_{(y;+\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(y)}$$

También grafico el "soporte", que me servirá más tarde:



b) $\mathbb{P}(2Y \geq X) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{X}{2}\right)$

Lo grafico e integro en la región resultante $\left(Sop(X,Y) \cap \left(Y \geq \frac{X}{2}\right)\right)$



Sé que $\mathbb{P}(2Y \geq X) = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

- $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=\frac{x}{2}}^{x} f_{XY}(x,y).dy.dx = \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=\frac{x}{2}}^{x} 2e^{-x-y}\,dy\,dx$ ← Nótese que no pongo las indicadoras, porque eso ya lo tuve en cuenta en el gráfico de D.

$$= 2.\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}.\left[\int_{y=\frac{x}{2}}^{x} e^{-y}\,dy\right]dx = -2\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\left(e^{-x}-e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$= -2\int_{x=0}^{+\infty}\left(e^{-2x}-e^{-\frac{3}{2}x}\right)dx = -2\left[\int_{x=0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx - \int_{x=0}^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}x}\,dx\right]$$

Si miramos detenidamente, e^{-2x} y $e^{-\frac{3}{2}x}$ casi que son densidades de variables exponenciales de parámetros -2 y $-\frac{3}{2}$ respectivamente. Dicho esto: Como $\int_{\mathbb{R}_{\geq}} f_A(a)\,da = 1$ para cualquier densidad de variable exponencial A, vemos que

- $\displaystyle\int_0^{+\infty}\lambda.e^{-\lambda x}dx = 1 = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}x}dx = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(2Y \geq X) = -2\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right] = \boxed{\frac{1}{3}}$$

NOTA

[redacted]

HOJA N° 6/6

FECHA 19/05/16

c) $f_x(x)$ puede calcularse como $\int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy$.

Además, notemos que $\mathbb{1}_{(y;+\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) = \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0;x)}(y)$.

Eso me permite escribir a $f_{XY}(x,y)$ de otra forma.

$$\Rightarrow f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} 2e^{-x-y} \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0;x)}(y)\,dy$$

$$= 2e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0;x)}(y)\,dy = 2e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) \cdot \int_0^x e^{-y}\,dy$$

$$= -2e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) \cdot (e^{-x} - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_x(x) = -2e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0;+\infty)}(x) \cdot (e^{-x} - 1)}$$

NOTA