Tema A

1	2	3	4	Calificación
B	R+	M	B-	A

APELLIDO Y NOMBRE: Losiggio Ignacio   TURNO: Noche
NRO. DE LIBRETA: 751/17   CARRERA: Computación

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Segundo cuatrimestre de 2017

Primer Parcial - 07/10/2017

---

1. Calcular —si existen— supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido como

$$A = \left\{ \frac{(-1)^{n+1} n + 7}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-3)\cdot(e^{y-1}-1)}{(x-3)^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (3,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (3,1), \end{cases}$$

analizar la continuidad de f **en todo** $\mathbb{R}^2$.

3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\big(1-\cos(x^5 y)\big)}{x^2+|x-5|y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

estudiar su diferenciabilidad **en ~~todo $\mathbb{R}^2$~~**. el $(0,0)$

Sugerencia: Analizar $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t}$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que el plano tangente a su gráfico en el punto $\big(-1, 1, f(-1,1)\big)$ es

$$\Pi : 2x + 3y - z = 2;$$

y sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,1)$ es $p(x,y) = 1 - 3y + 3x^2 - xy + 2y^2$.

Hallar el plano tangente al gráfico de $h = f \circ \nabla g$ en el punto $\big(0, 1, h(0,1)\big)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Fecha __/__/__

(4) Hoja 1

$P_1 f(-1,1)(x,y) = 2x + 3y - 2$

Polinomio de Taylor
de ~~clase~~ 1 orden
de f
centrado en (-1,1)

$P_f(-1,1) = f(-1,1) = -1$

$P_{xf}(-1,1) = f_x(-1,1) = -2$ No 2

$P_{yf}(-1,1) = f_y(-1,1) = 3$

$P_{2g(0,1)}(x,y) = 1 - 3y + 3x^2 - xy + 2y^2$

me piden hablar del la gradiente, así que salto ahí de una

$P_{xg}(x,y) = 6x - y$ / $P_{xg}(0,1) = g_x(0,1) = -1$

$P_{yg}(x,y) = -3 - x + 4y$ / $P_{yg}(0,1) = g_y(0,1) = 1$

$\nabla g(0,1) = (-1,1)$

$f(\nabla g(0,1)) = -1$

Tengo el punto del plano tangente, la forma del plano tg es la de taylor de ord 1 de $\underbrace{f(\nabla g(0,1))}_{h}$

$$h(0,1) + h_x(0,1)\,x + h_y^{(0,1)}(y-1) = z$$

$$\nabla h = \underbrace{(\nabla f)(\nabla g(0,1))}_{\text{tengo estos datos}} \cdot \underbrace{D\nabla g(0,1)}_{\text{tengo que calcular estos}}$$

Por qué podes usar la regla de la cadena?

$$D\nabla g = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yx} \end{vmatrix}$$

$g_{xx} = 6$

$g_{xy} = -1$

$g_{yx} = -1$

¡Son iguales! (es buena señal :) ✓

$g_{yy} = 4$

Fecha __/__/__

Hoja 2

$$\nabla h(0,1) = \left| \underset{g(0,1)}{f_x(-1,1)} \quad f_y(-1,1) \right| \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\left| -2 \quad 3 \right| \; (-12+3), (2+12)$$

?

arrastra error

$$\nabla h(0,1) = (-15, 14)$$

Luego el plano tg es

$$\boxed{-1 - 15x + 14(y-1) = z}$$

$$\boxed{-15 - 15x + 14y = z}$$

B

① Calcular sup, inf, max, min

de

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}\, n + 7}{2n+3} : n \in \mathbb{N}$$

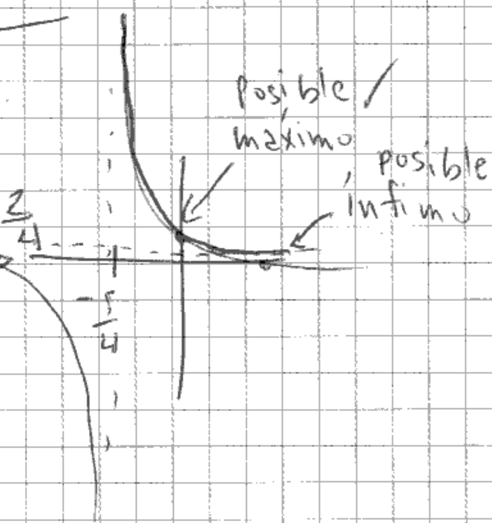
tiene un $(-1)^n$, por lo que me da ganas de estudiar por separado los casos "siempre positivo" y "siempre negativo"

a_{2n+1} $\qquad$ a_{2n}

poniendo 2n+1 como subíndice, dejas de tener en cuenta a_1 (empezar en a_3)

$$= \frac{\overbrace{(-1)^{2n+2}}^{=1}(2n+1)+7}{2(2n+1)+3}$$

$$\frac{2n+8}{4n+5}$$



$$\lim_{n \to +\infty} = \frac{2}{4}$$

→ ínfimo posible

Fecha __/__/__

Demostrar que a_{2n+1} es decreciente

$$a_{2n+1} = \frac{2n+8}{4n+5}$$

$$a_{2n+1} \geq a_{2(n+1)+1}$$

$$\frac{2n+8}{4n+5} \geq \frac{2(n+1)+8}{4(n+1)+5}$$

$$\frac{2n+8}{\underbrace{4n+5}_{>0}} > \frac{2n+10}{4n+9}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ esto siempre es > 0

$$(2n+8)(4n+9) > (2n+10)(4n+5)$$

$$\cancel{8n^2} + 18n + 32n + 72 > \cancel{8n^2} + 10n + 40n + 50$$

$$\cancel{50n} + 72 > \cancel{50n} + 50$$

$$\boxed{72 > 50}$$

es decreciente

Entonces, ~~como~~ a_{2n+1} tiene ~~un~~ un ínfimo $\left(\frac{2}{4}\right)$

Y un máximo y supremo ($n=1$) xq es estrictamente decreciente)

no tiene mínimo ya que $a_{2n+1} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{2n+8}{4n+5} > \frac{2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\cancel{2n}+8 > \cancel{2n} + \frac{5}{2}$$

$$\boxed{8 > \frac{5}{2}}$$

Hay que analizar a_{2n} y a_1, ya que no pertenece a $\{a_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ ni a $\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$

$n=1$ da el mínimo valor, que es 3

$n=1$ da el mínimo valor, que es 2

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1} \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{(-1)^2 + 7}{2+3} = \frac{8}{5}$$

Ahora analizo a_{2n}

Fecha / /

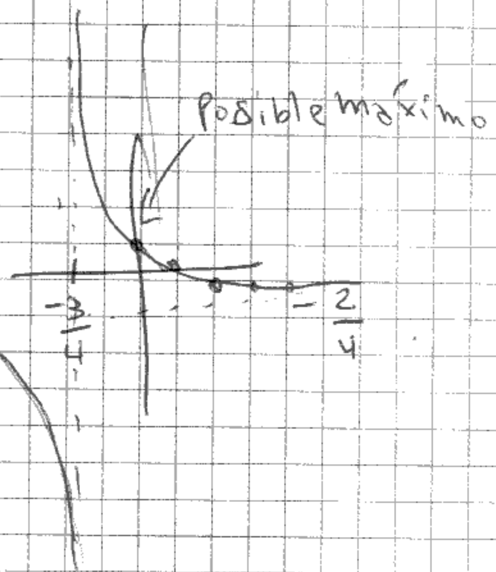
Hoja 4

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}\, 2n+7}{4n+3}$$ → Siempre -1

$$a_{2n} = \frac{-2n+7}{4n+3}$$

Asíntota en $-\frac{3}{4}$

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n} = \frac{-2}{4}$$



Posible ~~máximo~~ ínfimo

q.v.q es decreciente

$$\frac{-2n+7}{\underbrace{4n+3}_{>0}} > \frac{-2n-2+7}{\underbrace{4n+4+3}_{>0}}$$

mismo proceso de antes no justifico x eso

$$(-2n+7)(4n+7) > (-2n+5)(4n+3)$$

$$-\cancel{8n^2} \underbrace{-14n+28n}_{\cancel{14n}} + 49 > -\cancel{8n^2} \underbrace{-6n+20n}_{\cancel{14n}} + 15$$

$$\boxed{49 > 15}$$ luego es decreciente

✓

Entonces no tiene mínimo xq siempre es $> a -\frac{2}{4}$

tiene a $\boxed{-\frac{2}{4}}$ como ínfimo

y a $n=1$ como máximo y supremo

$$a_{2n}\Big|_{n=1} = \frac{-2+7}{4+3} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

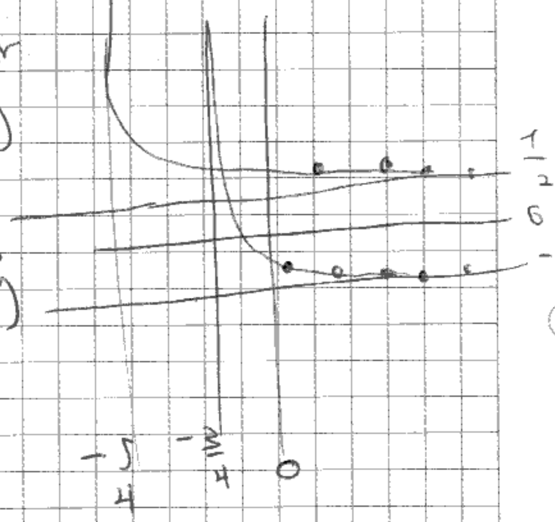
$$\frac{-2n+7}{4n+3} > -\frac{2}{4}$$

$$\cancel{-2n}+7 > \cancel{-2n} - \frac{3}{2}$$

$$\boxed{7 > -\frac{3}{2}}$$

a_n entonces tiene que tener el menor de los ínfimos (o a_1)

y el mayor de los máximos (o a_1)



a_n:

máximo: $\boxed{\frac{8}{5}}$

mínimo: no hay, ya que $a_1 > -\frac{2}{4}$, $a_{2n+1} > -\frac{2}{4}$ q es su límite q por lo que se le acerca arbitrariamente

y $a_{2n} > -\frac{2}{4}$

supremo: $\frac{8}{5}$

ínfimo: $\boxed{-\frac{2}{4}}$

B

Fecha __/__/__

Hoja 5

(2) Arranco analizando continuidad por álgebra de continuas ~~para~~ ver si puedo reducir el trabajo a pocos puntos

si $(x,y) \neq 3,1$

$$f(x,y) = \frac{\sin(x-3)\cdot(e^{y-1}-1)}{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

el denominador es continuo siempre ~~[illegible]~~

y sólo se hace 0 en $(x,y) = (3,1)$

valor a analizar

el numerador es multiplicación de cosas funciones continuas, por lo que es continuo en toda su extensión, cabe aclarar que tiene 0s en $x = 3$

ya que $\operatorname{sen}(0) \cdot$ ~~[illegible]~~ $= 0$

y tiene 0s en $y = 1$

ya que ~~[illegible]~~$\cdot(e^0 - 1) = 0$

en toda la recta $x = 3$

y en $y = 1$

hay raíces, $(x,y) = (3,1)$

suena lógico como espacio para otra raíz

~~[illegible]~~ pero la función está indefinida sin la cláusula extra.

Entonces, finalmente vemos que el único punto donde la continuidad cae bajo sospechas es el $(3,1)$

qvq $\boxed{\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 0}$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid \|(x,y)-(3,1)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \overset{\varepsilon}{\cancel{0}}$

$|x-3| < \delta$

$|y-1| < \delta$

uso esta expresión xq es la que vale en el entorno aunque no valga en el punto

< 0

$$\left| \frac{\sin(x-3)\cdot(e^{y-1}-1)}{(x-3)^2+(y-1)^2} \right| < \varepsilon$$

$\frac{|x|}{\|(x,y)\|}$ ≤ 1 $<$

< 0

$$\frac{|x-3|\cdot|e^{y-1}-1|}{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

$<$

$$|e^{y-1}-1|$$

~~tomo $\delta < 1$~~

~~$|y-1| < \delta$~~

~~$-1 < y-1 < 1$~~

~~$0 < y-1 < 1$~~

~~$|e-1| < \varepsilon$~~

~~$e < \varepsilon$~~

Fecha __/__/__ Esto tiende a 0, Es contradictorio con lo que concluiste. Hoja 6

$$\boxed{\left|e^{y-1}-1\right|} < \varepsilon$$

no me cierra mucho esta expresión, voy a intentar llegar a un ε-δ pero luego pienso chequear por curvas tal vez era discontinua

si tomo un δ aux el -1 sigue molestando

mmm...

Voy a ver si alguna curva tiende a 0 para asegurarme que estoy en el buen camino

$(x,y) = (3t, t)$ con $t \to 1$

$$\lim_{(3t,t)\to(3,1)} \frac{\sin(3t-3)\cdot\left(e^{t-1}-1\right)}{(3t-3)^2 + (t-1)^2}$$

$$\lim_{(3t,t)\to(3,1)} \frac{\sin(3t-3)\cdot\left(e^{t-1}-1\right)}{9t^2-18t+9+t^2-2t+1}$$

$$\lim_{(3t,t)\to(3,1)} \frac{\sin(3t-3)\cdot\left(e^{t-1}-1\right)}{10t^2-20t+10}$$

$$\lim_{(3t,t)\to(3,1)} \frac{\sin(3t-3)\cdot(e^{t-1}-1)}{10\,(t-1)^2}$$

LHopital $\frac{0}{0}$

$$\lim_{t\to 1} \frac{3\cos(3t-3)\cdot(e^{t-1}-1) + \sin(3t-3)\cdot e^{t-1}}{20\,(t-1)}$$

LHopital $\frac{0}{0}$

$$\lim_{t\to 1} \frac{3\left[\underbrace{-3\sin(3t-3)(e^{t-1}-1)}_{\to 0} + \underbrace{\cos(3t-3)\cdot e^{t-1}}_{\to 1}\right] + \underbrace{3\cos(3t-3)\cdot e^{t-1}}_{\to 1} + \underbrace{\sin(3t-3)\cdot e^{t-1}}_{\to 0}}{\underbrace{20\,t}_{\to 20}}$$

$$\frac{\cancel{4}\;6}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

El límite me dió $1/5$, por lo que no es continua en el punto (y en especial no es continua desde la curva $(3t, t)$)

Fecha __/__/__

Hoja 7

Entonces f es continua en $\mathbb{R}^2$ excepto $(3,1)$

R+

③ Arranco con ~~la~~ sugerencia

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} \quad \frac{0}{0}, \text{ L'Hopital}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1} \to 0$$

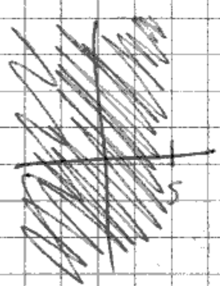
El entorno alrededor del $(0,0)$ tiene la forma

$$\frac{x(1-\cos(x^5 y))}{x^2+|x-5|y^2}$$

como $x<5$ alrededor el $(0,0)$ pienso estudiar sólo esa parte del módulo

entonces el entorno tiene esta forma

$$\frac{x(1-\cos(x^5 y))}{x^2-xy^2+5y^2}$$



Si es diferenciable entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - P_f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

tengo que armar el plano tangente:

$f(0,0) = 0$

$$f_x(x,y) = \frac{\left[1 - \cos(x^5 y) + x\left(-\operatorname{sen}(x^5 y)\, 4 y x^4\right)\right] \cdot (2x - y^2)}{-(x^2 - y^2 x + 5y^2)^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{\left[1 - \cos(x^5 y) + x\left(-\operatorname{sen}(x^5 y)\, 4 y x^4\right)\right] \cdot 2x - y^2}{-(x^2 + y^2 x + 5y^2)^2}$$

$f_x(0,0) =$ no definida

NO

M