TEMA D

1	2	3	4	Calificación
B / B	B	R+ / B	B / B	Aprob.

Apellido y Nombre [redacted]
Nro. de libreta: [redacted]

Turno: ~~Tarde~~ Noche (Práctica 4)
Carrera: Cs. Matemáticas

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2019

Primer Parcial - 11/05/2019

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

1. Calcular, si existen, los siguientes límites:

B a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^4y - \operatorname{sen}(x^2y)}{3x^2+y^2}$,

B b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^2}{-2x^3+x^2-y}$.

B 2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x+2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(-2,2),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(-2,2).\end{cases}$$

Analizar la continuidad de f en (x_0,y_0) para cada $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(e^y-1)(2x^3-3y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

R+ *a*) Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

B *b*) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(5xe^{x-y},-4y)=4y+e^{x+1}$.

B a) Hallar el plano tangente al gráfico de f en $(0,4,f(0,4))$.

B b) Hallar todas las direcciones $v\in\mathbb{R}^2$, $\|v\|=1$, en las que $\frac{\partial f}{\partial v}(0,4)=0$.

E) 1) a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4 y - \operatorname{sen}(x^2 y)}{3x^2 + y^2}$$

Para estudiar la existencia de este límite, primero pruebo por curvas

- $(t, 0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^4 0 - \operatorname{sen}(t^2 . 0)}{3t^2 + 0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{3t^2} = 0$$

- $(0, t)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2 . 0^4 t - \operatorname{sen}(0^2 t)}{3 . 0^2 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t^2} = 0$$

- (t, t)

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^4 . t - \operatorname{sen}(t^2 . t)}{3t^2 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^5 - \operatorname{sen}(t^3)}{4t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t^{\cancel{5}3}}{4\cancel{t^2}} - \frac{\operatorname{sen}(t^3)}{4t^2} = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{2t^3}{4}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{t}{4}}_{\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t^3)}{t^2 . t}}_{\to 1} = 0$$

Ahora ~~[illegible]~~ mi candidato a límite es 0, trato de probarlo por def

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4 . y - \operatorname{sen}(x^2 y)}{3x^2 + y^2} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } \|(x,y)\| < \delta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x^4 . y - \operatorname{sen} x^2 . y}{3x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

Asamblea

$$\left|\frac{2x^4 y - \operatorname{sen}(x^2 y)}{3x^2+y^2}\right| = \frac{|2x^4 y - \operatorname{sen}(x^2 y)|}{|3x^2+y^2|} \underset{3x^2+y^2 \geq 0}{=} \frac{|2x^4 y - \operatorname{sen}(x^2 y)|}{3x^2+y^2}$$

$$\underset{\substack{\text{desigualdad}\\ \text{triangular}}}{\leq} \frac{|2x^4 y| + |\operatorname{sen}(x^2 y)|}{3x^2+y^2} \underset{3>1}{<} \frac{|2x^4 y| + |\operatorname{sen}(x^2 y)|}{x^2+y^2} \leq \frac{2.x^4.|y| + |x^2 y|}{x^2+y^2} =$$

$$3x^2+y^2 \geq x^2+y^2$$

$$\frac{1}{3x^2+y^2} \leq \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2.x^4.|y|}{x^2+y^2} + \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}|y| \leq \frac{2.x^2}{x^2+y^2}\overset{\leq 1}{}x^2.|y| + |y| \leq 2.x^2|y| + |y|$$

$$< 2.\delta^2.\delta + \delta = 2\delta^3 + \delta \underset{\delta<1}{<} 2\delta + \delta = 3\delta < \varepsilon$$

$|x| < \|(x,y)\| < \delta$

$|y| < \|(x,y)\| < \delta$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

Si tomo $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x^4 y - \operatorname{sen}(x^2 y)}{3x^2+y^2}\right| < \varepsilon$$

$\therefore$ el límite es 0.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{-2x^3+x^2-y}$$

~~Paso~~ Calculo el límite por la curva (t, t^2)

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3+t^4}{-2t^3+t^2-t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3+t^4}{-2t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}\overbrace{(1+t)}^{\to 1}}{-2\cancel{t^3}} = -\frac{1}{2}$$

ahora calculo por la curva (t,t)

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3+t^2}{-2t^3+t^2-t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{t^2(t+1)}^{\to 0}}{t\underbrace{(-2t^2+t-1)}_{\to -1}} = 0$$

Si el límite existiera, debería dar lo ~~mismo~~ mismo calculado sobre cualquier curva. Esto no sucede pues calculado sobre (t,t^2) da $-\frac{1}{2}$ y sobre (t,t) da 0.
1) ∴ este límite no existe.

Ej 2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (-2,2) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (-2,2) \end{cases}$$

Analizar cont. de f en (x_0,y_0) para cada $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

· Dom $f = \mathbb{R}^2$ pues el denominador se anula únicamente en $(-2,2)$, pero en ese punto está definida aparte

$$\underbrace{3^{x+2}}_{>0}\underbrace{(x+2)^4}_{\geq 0}+\underbrace{(y-2)^2}_{\geq 0} = 0 \iff (x,y) = (-2,2)$$

Por álgebra de continuas, sé que f es continua para todo $(x_0,y_0) \neq (-2,2)$ pues $\dfrac{(x-2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2}$ es suma, producto, composición y cociente de funciones continuas cuyo denominador se anula exclusivamente en $(-2,2)$.
Como está ~~partida~~ definida aparte en dicho punto, me resta estudiar la continuidad allí.

Asamblea

f es continua en $(-2,2) \iff$

$$f(-2,2) = 0 = \lim_{(x,y)\to(-2,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{(x+2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2}$$

Voy a intentar probarlo por definición sin antes probar por curvas.

$$\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{(x+2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2} = 0 \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ / \text{ si}$$

$$\|(x+2,y-2)\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{(x+2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(x+2)^5(y+2)}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2}\right| = \frac{|x+2|^5\,|y+2|}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2} \underset{\text{C.A 1}}{\leq} \circledast$$

el denominador es siempre positivo

C.A 1.

Si tomo $\delta<1 \Rightarrow |x+2|<1$

$\iff -1<x+2<1$

$\iff 3^{-1}<3^{x+2}\leq 3^1$ pues $3^{g(t)}$ es una función creciente

$\iff 3^{-1}<3^{x+2}<3$

$\iff \frac{1}{3^{-1}} > \frac{1}{3^{x+2}} > \frac{1}{3}$

. $3^{-1}(x+2)^4 < 3^{x+2}(x+2)^4$

. $3^{-1}<1$

. $3^{-1}(y-2)^2 < (y-2)^2$

$$\Rightarrow 3^{-1}(x+2)^4+3^{-1}(y-2)^2 < 3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2$$

$$\iff \frac{1}{3^{-1}(x+2)^4+3^{-1}(y-2)^2} > \frac{1}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2}$$

Asamblea

$$\iff \frac{3}{(x+2)^4+(y-2)^2} > \frac{1}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2}$$

⊗

$$\frac{|x+2|^5\,|y+2|}{3^{x+2}(x+2)^4+(y-2)^2} \leq \underbrace{\frac{|x+2|^4\,|x+2|\,|y+2|.3}{(x+2)^4+(y-2)^2}}_{} \leq |x+2|\,|y+2|.3 <$$

≤ 1

$|y-2| < \delta \leq 1$

$1 < y < 3$

$3 < y+2 < 5$

$3 < |y+2| < 5$

$$< \delta.5.3 < 15\delta < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{15}$$

La definición de límite se cumple tomando $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{15}\right\}$

El límite es 0. Como es igual a la función evaluada en $(-2,2)$ $\Rightarrow$ es contínua en $(-2,2)$ y, por lo tanto, lo es en todo su dominio $= \mathbb{R}^2$.

Rta: f es contínua en (x_0,y_0) $\forall$ $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Ej 3:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^y-1)(2x^3-3y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Analizar exist. de derivadas direccionales de f en $(0,0)$

Sea $v = (a,b) \neq (0,0)$, $\|v\| = 1$

Las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ en $(0,0)$ existen si existe el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+a.h,\, 0+b.h) - f(0,0)}{h}$$ Estudio la existencia de este límite.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a.h, b.h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(e^{b.h}-1)(2.a^3h^3 - 3b^2.h^2)}{a^2h^2 + b^2h^2} \cdot \frac{1}{h}$$

$$\cancel{= \lim_{h\to 0} \frac{e^{bh}-1}{bh} \cdot b \cdot (2a^3h^3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(e^{bh}-1)\, h^2 (2.a^3.h - 3b^2)}{h^2(a^2+b^2)\, h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(e^{b.h}-1)}{b.h}}_{b\neq 0} \cdot b \cdot \underbrace{\frac{2a^3.h - 3b^2}{a^2+b^2}}_{=\|v\|^2 = 1}$$

C.A.2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Si $b \neq 0$ $\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(e^{b.h}-1)}{b.h}}_{\to 1} \cdot b \cdot \underbrace{(2a^3.h - 3b^2)}_{\to -3b^2} = b.(-3b^2) = -3b^3$

Si $b=0$ $(a,b) = (1,0)$, sería calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ mal

o bien $(a,b) = (-1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(e^0-1)(2.h^3 - 3.0^2)}{h^2+0^2} \cdot \frac{1}{h} = 0$$

Las derivadas direccionales existen en $(0,0)$ $\forall\, v = (a,b) \neq (0,0)$ $\|v\| = 1$

y tienen la forma $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = -3b^3$ si $b \neq 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $(b=0)$

Falta caso $v = (-1, 0)$

b) Analizar diferenciabilidad de f en $(0,0)$

Si f fuera diferenciable en $(0,0)$, debería valer que

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \nabla f_{(0,0)} \cdot w \quad \forall\, w = (v_1, v_2), \ \|w\| = 1$$

Asamblea

$\nabla f_{(0,0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \, , \, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$

$\hookrightarrow v=(1,0) \qquad \hookrightarrow v=(0,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3 \cdot 1^3 = -3 \qquad \Rightarrow \nabla f_{(0,0)} = (0,-3)$

Si tomo $w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \|w\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Por lo calculado para las derivadas direccionales ~~debería~~ da $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = -3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{-3(\sqrt{2})^3}{8}$, pero si fuera diferenciable debería dar

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = (0,-3) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-3) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-3\sqrt{2}}{2} \neq \frac{-3(\sqrt{2})^3}{8} \quad \therefore \text{ f no es diferenciable en } (0,0)$$

Ej 4:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable

$f(5xe^{x-2}, -4y) = 4y + e^{x+1}$

a) Hallar P.T a f en $(0,4,f(0,4))$

Para hallar el plano tangente a f en $(0,4,f(0,4))$ Π_f

$$\Pi_f: \; z = f(0,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,4)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)(y-4)$$

Necesito conocer $f(0,4)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,4) \, , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)$

Si tomo $h(x,y) \cdot \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$h(x,y) = (5x\,e^{x-y}, -4y)$

conozco que $f \circ h\,(x,y) = 4y + e^{x+1}$

Observo que $h(0,-1) = (5.0.e^{0+1}, -4(-1)) = (0,4)$

entonces $f(h(0,-1)) = f(0,4) = 4(-1) + e^{0+1} = -4 + e$

Ya tengo el dato $f(0,4) = -4 + e$

Ahora necesito las derivadas parciales. Uso regla de la cadena pues f es diferenciable y h también.

$D\,f\circ h\,(0,-1) = Df(h(0,-1)) \cdot Dh(0,-1) = Df(0,4) \cdot Dh(0,-1)$

- $D f\circ h\,(x,y) = (e^{x+1}, 4)$

  $D f\circ h\,(0,-1) = (e^{0+1}, 4) = (e,4)$

C.A. 3: $Dh(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla h_1 \\ \nabla h_2 \end{pmatrix}$

- $h_1(x,y) = 5x.e^{x-y}$

  $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = 5\,e^{x-y} + 5x\,e^{x-y}$

  $\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = 5x\,e^{x-y}.(-1)$

- $h_2(x,y) = -4y$

  $\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = 0$ $\quad \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) = -4$

- $Dh(x,y) = \begin{pmatrix} 5.e^{x-y} + 5x\,e^{x-y} & -5x\,e^{x-y} \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

- $Dh(0,-1) = \begin{pmatrix} 5e & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$D f\circ h(0,-1) = (e,4) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,4), \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)\right) \begin{pmatrix} 5e & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$(e,4) = \begin{pmatrix} 5e\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,4) \\ -4\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,4) \end{pmatrix}$

$(e,4) = \left(5e \frac{\partial f}{\partial x}(0,4), -4 \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)\right)$

$e = 5e \frac{\partial f}{\partial x}(0,4) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,4) = \frac{1}{5}$.

$4 = -4 \frac{\partial f}{\partial y}(0,4) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,4) = -1$. $\quad \nabla f_{(0,4)} = \left(\frac{1}{5}, -1\right)$

Ya tengo todos los datos para armar el P.T Π_f

$\Pi_f: \; z = f(0,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,4)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,4)(y-4)$

$\Pi_f: \; z = -4 + e + \frac{1}{5}x - (y-4)$

b) Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ $\|v\| = 1$ / $\frac{\partial f}{\partial v}(0,4) = 0$

Como f es diferenciable, vale que

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,4) = \nabla f_{(0,4)} \cdot v = \left(\frac{1}{5}, -1\right) \cdot v$

Siendo $v = (v_1, v_2)$ $\|v\| = 1$

Busco $\left(\frac{1}{5}, -1\right)(v_1, v_2) = \frac{1}{5}v_1 - v_2 = 0$

También tengo la ecuación de la norma

$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1 \iff v_1^2 + v_2^2 = 1$

Tengo 2 ecuaciones

- $v_1^2 + v_2^2 = 1$
- $\frac{1}{5}v_1 - v_2 = 0$

$V_2 = \frac{1}{5} V_1$

$V_1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 V_1^2 = \frac{26}{25} \cdot V_1^2 = 1$

$V_1^2 = \frac{25}{26}$

$V_1 = \pm\sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{\pm 5}{\sqrt{26}}$

Si $V_1 = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

Si $V_1 = \frac{-5}{\sqrt{26}} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{5} \frac{(-5)}{\sqrt{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$

- Hay dos vectores $V = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

$V' = \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

Corroboro: $V: \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{26} + \frac{1}{26}} = \sqrt{\frac{26}{26}} = \sqrt{1} = 1$

$\frac{1}{\cancel{5}} \frac{\cancel{5}}{\sqrt{26}} - \frac{1}{\sqrt{26}} = 0$ V cumple ambos ecuaciones

$V': \sqrt{\left(\frac{-5}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{26} + \frac{1}{26}} = 1$

$\frac{1}{\cancel{5}}\left(-\frac{\cancel{5}}{\sqrt{26}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = 0$ V' cumple ambos ecuaciones

Rta: $\left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$ y $\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

Son los únicos vectores que cumplen lo pedido.