Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer parcial (13/05/2023) - 1er. cuatrimestre 2023

HB

TEMA 2

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B/B	B/B	B	10 diez

Apellido: Martínez Nro. de libreta: [redacted] Nro de práctica: 2

Nombre: Fausto Nicolás Carrera: Licenciatura en Ciencias de Datos

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

---

1. Sea C la curva dada por la intersección de las superficies

$$9z^2 + y^2 = 1 \qquad y \qquad z = \frac{1}{2}x + 1.$$

   (a) Dar **una** parametrización de la curva C.

   (b) Hallar los puntos de C cuya recta tangente tenga dirección perpendicular al vector $(2,0,1)$.

---

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)(y+2)^2\,\mathrm{sen}(x-1)}{(x-1)^4+(y+2)^4}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{(y+1)^3\ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2}$.

---

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2+y^2)|x|y}{x^6+|y|^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

   (b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

---

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que el plano tangente a su gráfico en $(2,1,f(2,1))$ es

$$x + y + 3z = 9.$$

Para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s,t) = f\left(e^{-s} + \cos t,\ \mathrm{sen}(s) + e^{st} - t\right),$$

calcular el plano tangente al gráfico de g en $(0,0,g(0,0))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

Fausto Martínez - Hoja 1

2) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{(x-1)(y+2)^2 \cdot \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^4+(y+2)^4}$

Efectuando un cambio de variables, para trabajar más cómodo ~~tengo~~ llamo $s=x-1$ y $t=y+2$, cuando $(x,y)\to(1,-2)$ entonces $(s,t)\to(0,0)$. Reescribiendo el límite:

$\Rightarrow \lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \dfrac{s\cdot t^2\cdot \operatorname{sen} s}{s^4+t^4}$. Por iterados

$\lim\limits_{t\to0}\left(\lim\limits_{s\to0} \dfrac{s\cdot t^2\cdot \operatorname{sen} s}{s^4+t^4}\right)=0 \wedge \lim\limits_{s\to0}\left(\lim\limits_{t\to0} \dfrac{s\cdot t^2\cdot \operatorname{sen} s}{s^4+t^4}\right)=0$

$\Rightarrow$ Entonces, si el límite existe, debería valer 0. Probemos con la curva $s=t$, con $t\to0$.

$\lim\limits_{t\to0} \dfrac{t\cdot t^2\cdot \operatorname{sen} t}{t^4+t^4} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{t}{t}\cdot \dfrac{t\cdot t^2\cdot \operatorname{sen} t}{t^4+t^4}$

$= \lim\limits_{t\to0} \cancel{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}}^{\to 1} \cdot \dfrac{\cancel{t^4}}{2\cancel{t^4}} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ ¡Es distinto de 0!

Puedo entonces concluir que ni este límite, ni por consiguiente el original, existen

Rta

$$\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{(x-1)(y+2)^2 \cdot \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^4+(y+2)^4} \text{ No existe}}$$

B

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{(y+1)^3 \cdot \ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2}$. Por iterados:

$\lim\limits_{y\to-1}\left(\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(y+1)^3\cdot\ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2}\right) = \lim\limits_{y\to-1} \dfrac{(y+1)^{\cancel{3}}\cdot\ln(-4y)}{4\cancel{(y+1)^2}} =$

$\lim\limits_{y\to-1} \dfrac{(y+1)\cdot\ln(-4y)}{4} = \boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to-1} \dfrac{(y+1)^3\cdot\ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2}\right) = \boxed{0}$

Sospecho, entonces que mi límite vale 0, trato de probarlo con sándwich

$$0 \leq \left| \frac{(y+1)^3 \cdot \ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2} \right| = \frac{|(y+1)^3| \cdot |\ln(-4y)|}{4x^2+4(y+1)^2} =$$

$$\frac{(y+1)^2}{4x^2+4(y+1)^2} \cdot |y+1| \cdot |\ln(-4y)| \leq |y+1| \, |\ln(-4y)|$$

≤ 1 pues

$(y+1)^2 \leq 4x^2+4(y+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{(y+1)^2}{4x^2+4(y+1)^2} \leq 1$$

Como $y \to -1$

$|y+1| \to 0$

$|\ln(-4y)| \to \ln 4$

entonces, la expresión tiende a 0.

Como $0 \leq \left| \frac{(y+1)^3 \cdot \ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2} \right| \leq |y+1| \, |\ln(-4y)|$ (que tiende a 0 pues y tiende a -1)

Por sandwich, puedo afirmar que el límite existe y vale 0

Rta.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{(y+1)^3 \cdot \ln(-4y)}{4x^2+4(y+1)^2} \text{ existe y vale } 0}$$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2+y^2) \cdot |x| \cdot y}{x^6+|y|^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para ver si las derivadas parciales existen, tomo un vector $v = (a,b)$ genérico con $a^2+b^2=1$ y evalúo por definición

$$\lim_{h\to0} \frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{2(h^2a^2+h^2b^2) \cdot |ha| \cdot hb}{(h^6a^6+|h^3b^3|) \cdot h}$$

Tomo límites laterales para sacarme de encima los módulos, si me dan lo mismo, entonces ese será el valor del primer límite

$$\lim_{h\to0^+} \frac{(2h^2a^2+2h^2b^2) \cdot h^2ab}{h^7a^6+h^4b^3} = \lim_{h\to0^+} \frac{h^2(2a^2+2b^2) \cdot h^2 \cdot a \cdot b}{h^4(h^3a^6+b^3)}$$

$$= \lim_{h\to0^+} \frac{\cancel{h^4}\, ab\,(2a^2+2b^2)}{\cancel{h^4}(h^3a^6+b^3)} = \frac{2ab\,\cancel{(a^2+b^2)}^{\,1}}{\underbrace{h^3a^6}_{\to0}+b^3} = \boxed{\frac{2ab}{b^3}}$$

Fausto Martinez - Hoja 2

Ahora, por izquierda

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{(2h^2a^2+2h^2b^2)\cdot -ha \cdot hb}{h^7a^6+ -h^4b^3} = \frac{h^2(2a^2+2b^2)\cdot -h^2ab}{-h^4(-h^3a^6+b^3)}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{-h^4}(2a^2+2b^2)\cdot a \cdot b}{\cancel{-h^4}(-h^3a^6+b^3)} = \frac{2\overbrace{(a^2+b^2)}^{1}\cdot ab}{\underbrace{-h^3a^6}_{0}+b^3} = \boxed{\frac{2ab}{b^3}}$$

¡Nos dieron lo mismo!

Todos las derivadas direccionales (en (0,0)) menos la de $v=(1,0)$ existen, pues ahí estaríamos dividiendo por 0, (observar que es el único caso en el que b vale 0 pues $a^2+b^2=1$)

Miremos ese caso, que aparte coincide con $f_x(0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3 \cdot |h| \cdot 0}{h^6+0} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{0}{h^6} = \lim_{h \to 0} 0 = \boxed{0}$$. Concluyo, entonces, como $f_x(0,0)$ también existe, que

Rta

Existen todas las derivadas direccionales de f en (0,0)

Para ver si es diferenciable en (0,0), se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Observemos, entonces, ese límite.

Primero veamos que $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))$

Calculemos $f_y(0,0)$, pues ya calculamos $f_x(0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{2h^2\cdot 0 \cdot h}{0+|h|^3}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{|h|^3} = \lim_{h \to 0} 0 = \boxed{0}$$ (Creo que lo podría haber hecho con el resultado de que el resto de las derivadas direccionales dan $\frac{2ab}{b^3}$, pero por las dudas lo hacemos también por definición, je)

Luego $f_x(0,0)=0 \wedge f_y(0,0)=0 \Rightarrow \nabla f(0,0)=(0,0)$

Resolvamos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(x^2+y^2)\cdot|x|\cdot y - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot x^6+|y|^3}$$

Nos acercamos con la curva $y=x$ con $x\to 0^+$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(2x^2)\cdot x\cdot x}{\sqrt{2x^2}\cdot(x^6+x^3)} = \frac{4x^4}{\sqrt{2}x\cdot(x^6+x^3)} = \frac{4x^4}{\sqrt{2}x^7+\sqrt{2}x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^4}(4)}{\cancel{x^4}(\sqrt{2}x^3+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\underbrace{\sqrt{2}x^3}_{0}+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{2}}}$$

Como acercandome por una curva no ~~[illegible]~~ me dió 0, puedo concluir que si el límite existe no vale 0, entonces, de cualquier manera, estoy en condiciones de afirmar que

Rta.

$\boxed{f \text{ no es diferenciable en } (0,0)}$

4) Reescribamos el plano tangente a f, dado que es diferenciable, para hallar $f(2,1)$, $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$

$3z = 9-x-y$

$z = 3 - 1/3x - 1/3y$

$z = 3 - \frac{1}{3}(x-2) - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{1}{3}$

$\boxed{z = 2 - \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1)}$. como se que el plano tangente tiene la forma

$\boxed{z = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1)}$

Puedo deducir que

- $f(2,1)=2$
- $f_x(2,1)=-1/3$
- $f_y(2,1)=-1/3$

Luego, g también es diferenciable pues es una composición de f

$\Rightarrow g(0,0) = f(e^0+\cos(0);\ \operatorname{sen}(0)+e^0-0) = f(2,1)$

$\Rightarrow \boxed{g(0,0)=2}$

$$g(s,t) = f(\underbrace{e^{-s}+\cos t}_{x(s,t)};\ \underbrace{\operatorname{sen}(s)+e^{st}-t}_{y(s,t)})$$

Fausto Martínez - Hoja 3

Nos falta calcular $\frac{\partial g}{\partial s}(0,0)$ y $\frac{\partial g}{\partial t}(0,0)$ para poder dar con el plano tg. Por regla de la cadena sabemos que (y como f y g son diferenciables)

$$f \begin{cases} x \begin{cases} s \\ t \end{cases} \\ y \begin{cases} s \\ t \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(0,0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(0,0)$$

Ya calculamos (o sabemos que) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -1/3 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1/3$

Calculemos el resto de las der. parciales

$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = -e^{-s} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial s}(0,0) = -1}$

$\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = \cos(s) + t \cdot e^{st} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial s}(0,0) = 1}$

$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = -\text{sen}(t) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial t}(0,0) = 0}$

$\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = s \cdot e^{st} - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = -1}$

Ya podemos calcular $\frac{\partial g}{\partial s}(0,0)$ y $\frac{\partial g}{\partial t}(0,0)$, reemplazando!

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial s}(0,0) = (-1/3) \cdot (-1) + (-1/3) \cdot 1 = 1/3 - 1/3 = \boxed{0}$

$\frac{\partial g}{\partial t}(0,0) = (-1/3) \cdot 0 + (-1/3) \cdot (-1) = \boxed{1/3}$

Como sabemos que el plano tg a g en (0,0) es

$$\Pi_{Tg}: g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial s}(0,0) \cdot s + \frac{\partial g}{\partial t}(0,0) \cdot t$$

$$\Rightarrow \Pi_{Tg}: 2 + 0 \cdot s + 1/3\, t$$

Concluyo, entonces, que el plano tangente a g en (0,0) es

Rta $\boxed{\Pi_{Tg}: 2 + 1/3\, t}$

1) Observo que $9z^2+y^2=1$, se puede escribir como

$$\frac{z^2}{1/9}+y^2=1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{z}{1/3}\right)^2+y^2=1$$

Lo cual es una ecuación de una elipse en $\mathbb{R}^2$ y se parametriza como

$\begin{cases} y=\cos t \\ z=1/3 \operatorname{sen} t \end{cases}$, luego por la otra ecuación, despejo x y obtengo

$z=1/2x+1$

$z-1=1/2x$ $\quad \boxed{x=2z-2}$

$2(z-1)=x$

$\Rightarrow$ Puedo parametrizar la intersección como la curva

Rta

$$\boxed{C(t)=\begin{cases} x=2/3 \operatorname{sen} t-2 \\ y=\cos t \\ z=1/3 \operatorname{sen} t \end{cases}} \quad t\in[0,2\pi]$$

Luego, para que la recta tangente a cierto punto $C(t_0)$ sea perpendicular a $(2,0,1)$, se debe cumplir que $C'(t_0)\cdot(2,0,1)=0$. Planteémoslo:

$C'(t)=\begin{cases} 2/3\cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ 1/3\cos t \end{cases}$. Este "vector" debe ser perpendicular a $(2,0,1)$, entonces

(Le llamo vector pues lo imagino evaluado en un punto, pero es una función $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$)

$$(2/3\cos t,-\operatorname{sen} t,1/3\cos t)\cdot(2,0,1)=0$$

$$\Rightarrow \quad 4/3\cos t-\cancel{0\cdot \operatorname{sen} t}+1/3\cos t=0$$

$$5/3\cdot\cos t=0$$

$$\boxed{\cos t=0}$$

En el intervalo $[0,2\pi]$ esto se cumple cuando $t=\pi/2$ o $t=3\pi/2$

$\Rightarrow$ Entonces, los puntos que cumplen ~~[illegible]~~ que su recta tangente tiene dirección perpendicular al vector $(2,0,1)$ son

$$C(\pi/2)=(2/3-2,0,1/3)=(-4/3,0,1/3)$$

$$C(3\pi/2)=(-2/3-2,0,-1/3)=(-8/3,0,-1/3)$$

Rta

Rta = Los puntos que cumplen la condición son $C(\pi/2)=(-4/3,0,1/3)$ y $C(3\pi/2)=(-8/3,0,-1/3)$

Fausto Martínez - Hoja 4

Como añadido, podemos calcular los vectores directores de la recta tangente a C en esos puntos y comprobar que son ortogonales a $(2,0,1)$

$C'(\pi/2) = (0,-1,0)$ y $(0,-1,0)\cdot(2,0,1)=0$ ✓

$C'(3\pi/2) = (0,1,0)$ y $(0,1,0)\cdot(2,0,1)=0$ ✓