A

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	E	A

Nombre: [redacted]
Libreta: [redacted]

Turno de Práctica: 2a Mañana
Carrera: Licenciatura en Cs. Matemáticas

Tema D

Análisis I - Matemática 1 - Análisis matemático I - Análisis II (C)
Segundo Parcial
6 de Julio de 2013

Ejercicio 1. Sea R la región de los puntos del semicírculo de radio 5 con centro en $(0,0)$ que se encuentran por debajo de la recta $x = 2y$.
Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = -2x^2 + y^2 - 8y$ en R.

Ejercicio 2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x,y) = (x^3 e^{x-1} y + xy, e^{x^2-1} y^4 + x^5)$$

a) Demostrar que existe un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ del $(1,0)$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ del $(0,1)$ y una inversa $F^{-1} : V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(0,1) = (1,0)$.

b) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que la ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(1,0,h(1,0))$ es $z = 3 - 2x + 10y$. Hallar el plano tangente al gráfico de $h \circ F^{-1}$ en el punto $(0,1,1)$.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)(x+4)^2}{2x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Ejercicio 4. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 0, y \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{25} \leq 1\}$.
Calcular

$$\int\int_D e^{x^2 + \frac{y^2}{25}}\, dx\, dy$$

Justifique todas sus respuestas.

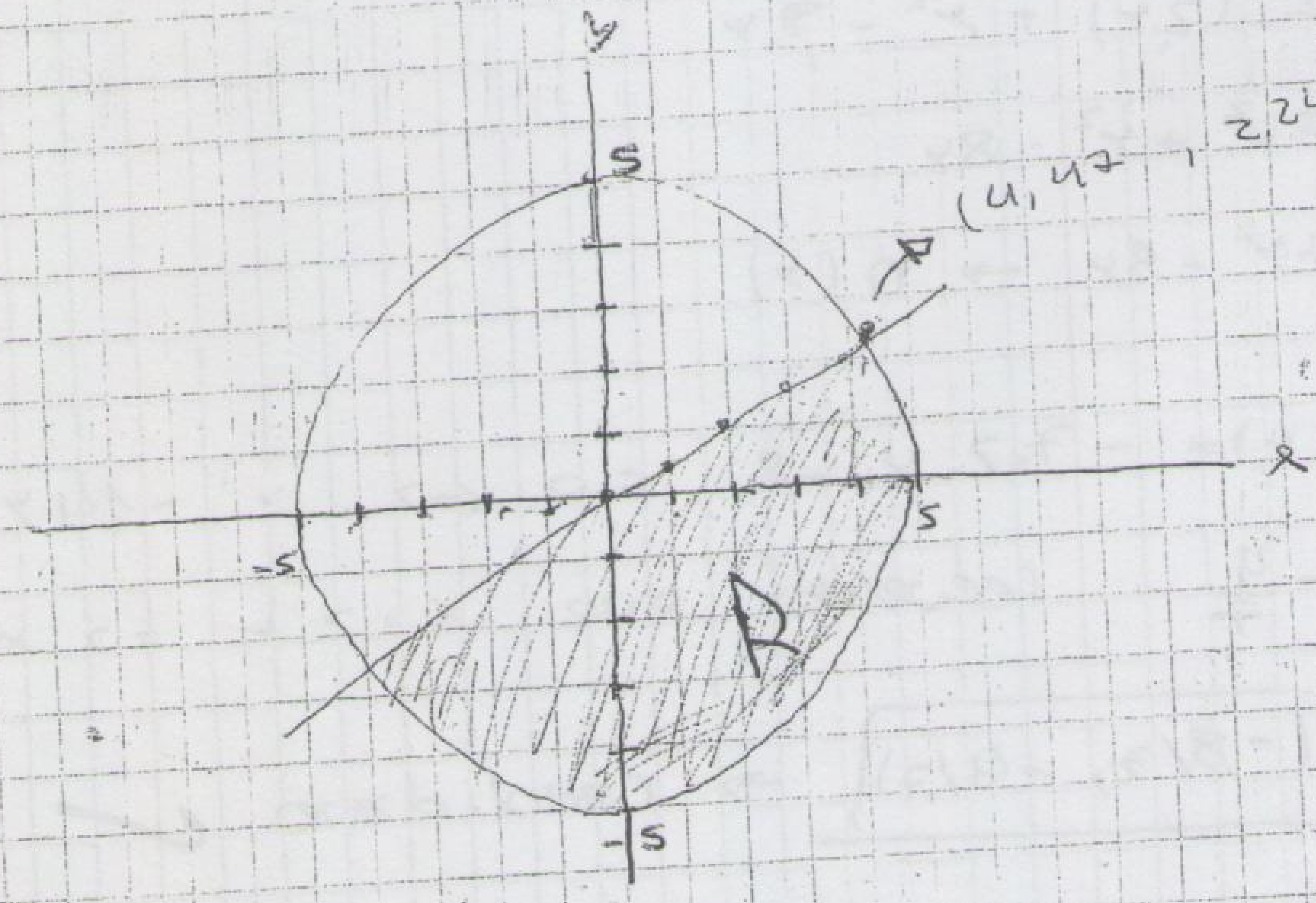
B [redacted]

HOJA 1/5

FECHA

2/6

(1)



$f(x,y) = -2x^2 + y^2 - 8y$

f es continua en un intervalo cerrado entonces encuentra su máximo y mínimo absoluto en ~~...~~ la región R

busco ~~...~~ puntos críticos en el interior

$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 8$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff x = 0,\ y = 4$ $\qquad \boxed{(0,4)} \to$ no candidato pues no pertenece a R

busco en los bordes

primero utilizo lagrange para mirar en los bordes de el semicírculo

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ $\qquad \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ que se hace $(0,0)$ en el $(0,0) \Rightarrow \boxed{(0,0)} \to$ candidato

pues lagrange no me dice nada

$-4x = \lambda 2x \to x = 0$ ó $\lambda = -2$

$2y - 8 = \lambda 2y$

$x^2 + y^2 = 25$

no es candidato pues no pertenece a R

candidato

si $x = 0 \Rightarrow 0 + y^2 = 25 \Rightarrow y = 5,\ y = -5$ $\qquad \boxed{(0,5),\ (0,-5)}$

si $\lambda = -2 \Rightarrow 2y - 8 = -2.2.y \Rightarrow y = 4/3 \Rightarrow x^2 + (4/3)^2 = 25$

$\Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{209}}{3}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\left(-\frac{\sqrt{209}}{3}, \frac{4}{3}\right),\ \left(\frac{\sqrt{209}}{3}, \frac{4}{3}\right)}$

candidatos

Para ver sobre la recta $x = 2y$ parametrizo

$f(2y, y) = -2 \cdot (2y)^2 + y^2 - 8y$

$= -8y^2 + y^2 - 8y$

$= -7y^2 - 8y \rightarrow h(y)$

$h'(y) = -7 \cdot 2y - 8 = 0 \iff -14y = 8$

$y = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}$. recuerdo que $x = 2y \Rightarrow x = -8/7$

$\boxed{(-8/7, -4/7)} \rightarrow$ candidato.

y tomo los puntos donde se cortan la esfera y la recta

$\underbrace{(4,47, 2,24), (-4,47, -2,24)}_{\text{candidatos}}$

como los calculaste? Porque no escribiste de donde salieron?

evaluo a F en todos mis candidatos

$f(0,0) = 0$ $\quad f(0,-5) = 65$

$f(\frac{\sqrt{209}}{3}, 4/3) = -55,33$ $\quad f(-8/7, -4/7) = 16/7$

$f(4,47, 2,24) = -52,86$ $\quad f(-4,47, -2,24) = -17,02$

$\Rightarrow$ F alcanza su máximo en R el el punto $(0,-5)$ y su valor es de 65

y F alcanza su mínimo en R en el $(\frac{\sqrt{209}}{3}, 4/3)$ y vale $-55,33$

C [redacted]

HOJA 2/5

FECHA

3/6

② $f(x,y) = (\overbrace{x^3 \cdot e^{x-1} \cdot y + xy}^{F_1}, \overbrace{e^{x^2-1} \cdot y^4 + x^5}^{F_2})$

f es C^1 pues está formada por dos términos cada uno de los cuales es C^1 por ser suma y productos entre polinomios y exponenciales.

$f(1,0) = (0,1)$

$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = y \cdot (3x^2 \cdot e^{x-1} + x^3 \cdot e^{x-1}) + y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,1) = 0$

$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = x^3 \cdot e^{x-1} + x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(1,0) = 2$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot y^4 + 5x^4 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}(1,0) = 5$

$\frac{\partial F_2}{\partial y} = e^{x^2-1} \cdot 4y^3 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(1,0) = 0$

$DF(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -10 \neq 0$

$\Rightarrow$ ~~∃ un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ del (0,1)~~ Por T.F. Inversa

∃ un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ del $(1,0)$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^2$ del $(0,1)$ y una inversa $F^{-1}: V \to U$ de clase C^1

$F^{-1}(0,1) = (1,0)$

$DF^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ del plano tangente a h en el $(1,0,h(1,0))$ obtengo que

$h(1,0) = 1 \qquad \nabla h(1,0) = (-2,10)$

busco gradiente de $h \circ F^{-1}$ en el $(0,1)$

$\nabla h \circ F_{(0,1)} = \nabla h_{F^{-1}(0,1)} \cdot DF^{-1}_{(0,1)} = (-2,10) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = (5, -2$

busco $h \circ F^{-1}(0,1) = h(F^{-1}(0,1)) = h(1,0) = 1$

el plano tangente se define como

$z = f(P) + \nabla f(P) \cdot (X - P)$

en este caso f es $h \circ F^{-1}$, y $P = (0,1)$ =>

$z = 1 + (5, -2/5) \cdot (x - 0, y - 1)$

$z = 1 + 5x - 2/5\, y + 2/5$

$$\boxed{z = 7/5 + 5x - \frac{2}{5} y}$$

1)

[redacted]

FECHA 16 **4/6**

$$\textcircled{3}\quad \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x).(x+4)^2}{2x^{7/2}+x^{5/2}+5x^{3/2}}}_{F(x)}$$

$$* \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x).(x+4)^2+\operatorname{sen}(x).2(x+4)}{1} = 16$$

aguante L'hospital

x x
P

analizo

$$\lim_{b\to 0}\int_b^1 F(x) \Rightarrow \text{siempre positiva para } x \in (0,1]$$

veo cómo se comporta $\operatorname{sen}(x).(x+4)^2$ cerca del 0. para eso la comparo con x

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x).(x+4)^2}{x} = 16$$

$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \to 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x).(x+4)^2$ al rededor del 0 se comporta como x eso quiere decir que

este mismo limite se podría ver con L'hospital de la siguiente manera $* \uparrow$

si la integral impropia $\int_0^1 \frac{x}{2x^{7/2}+x^{5/2}+5x^{3/2}}$ converge

$\Rightarrow \int_0^1 F(x)$ converge, y si la primera

diverge $\Rightarrow \int_0^1 F(x)$ diverge

miro $\lim_{b\to \cancel{\infty}\, 0} \int_0^1 \frac{1}{2x^{5/2}+x^{3/2}+x^{1/2}}$ ↗ saqué factor común x

$$\frac{1}{2x^{5/2}+x^{3/2}+x^{1/2}} \leq \frac{1}{x^{1/2}}$$

y por series P se que $\lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{1}{x^{1/2}}$ converge

$$\Rightarrow \lim_{b \to 0} \int_b^1 \frac{1}{2x^{5/2} + x^{3/2} + x^{7/2}} \quad \text{converge}$$

Y vimos que esta ~~función~~ integral se comporta igual (en términos de convergencia) que entre 0 y 1

$f(x) \Rightarrow$

$$\lim_{b \to 0} \int_b^1 f(x) \quad \text{converge}$$

mvo

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c |f(x)| \rightarrow$$ pongo módulo pues la función no es siempre positiva.

Si la integral impropia $\int_1^{+\infty} |f(x)|$ converge $\Rightarrow$

la integral impropia de $\int_1^{+\infty} f(x)$ converge

acoto $|f(x)|$:

le saco el módulo pues es siempre positiva

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x \, (x+4)^2}{2x^{7/2} + x^{5/2} + 5x^{3/2}} \right| \leq \frac{1 \cdot (x+4)^2}{2x^{7/2}} = \frac{x^2 + 8x + 16}{2x^{7/2}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} \cdot (1 + 8/x + 16/x^2)}{\cancel{x^2} \cdot 2 \cdot x^{3/2}}$$

elijo tomar $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ que se que converge la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$

De que si $\lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1 + 8/x + 16/x^2}{2x^{3/2}}$ converge

$\Rightarrow \lim_{c \to +\infty} \int_1^c |f(x)|$ también pues la primera es mayor

E

[redacted]

HOJA: 4/5

FECHA:

5/6

~~xxxxx~~ ~~xx~~ utilizo criterio de división (del cociente)

~~xxxxxxx~~

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1 + 8/x + 16/x^2}{2\cancel{x^{3/2}}}}{1/\cancel{x^{3/2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \overset{0}{8/x} + \overset{0}{16/x^2}}{2} = 1/2$$

$\Rightarrow$ por criterio se que

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1 + 8/x + 16/x^2}{2x^{3/2}}$$ converge

y entonces por ser esta mayor que $|F(x)|$

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c |F(x)|$$ converge y como converge absolutamente

$$\Rightarrow \lim_{c \to +\infty} \int_1^c F(x)$$ converge

la integral impropia $$\int_0^{+\infty} F(x) = \underbrace{\int_0^1 F(x)}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} F(x)}_{\text{converge}}$$

como ambas convergen $\Rightarrow \int_0^{+\infty} F(x)$ converge

I [redacted]

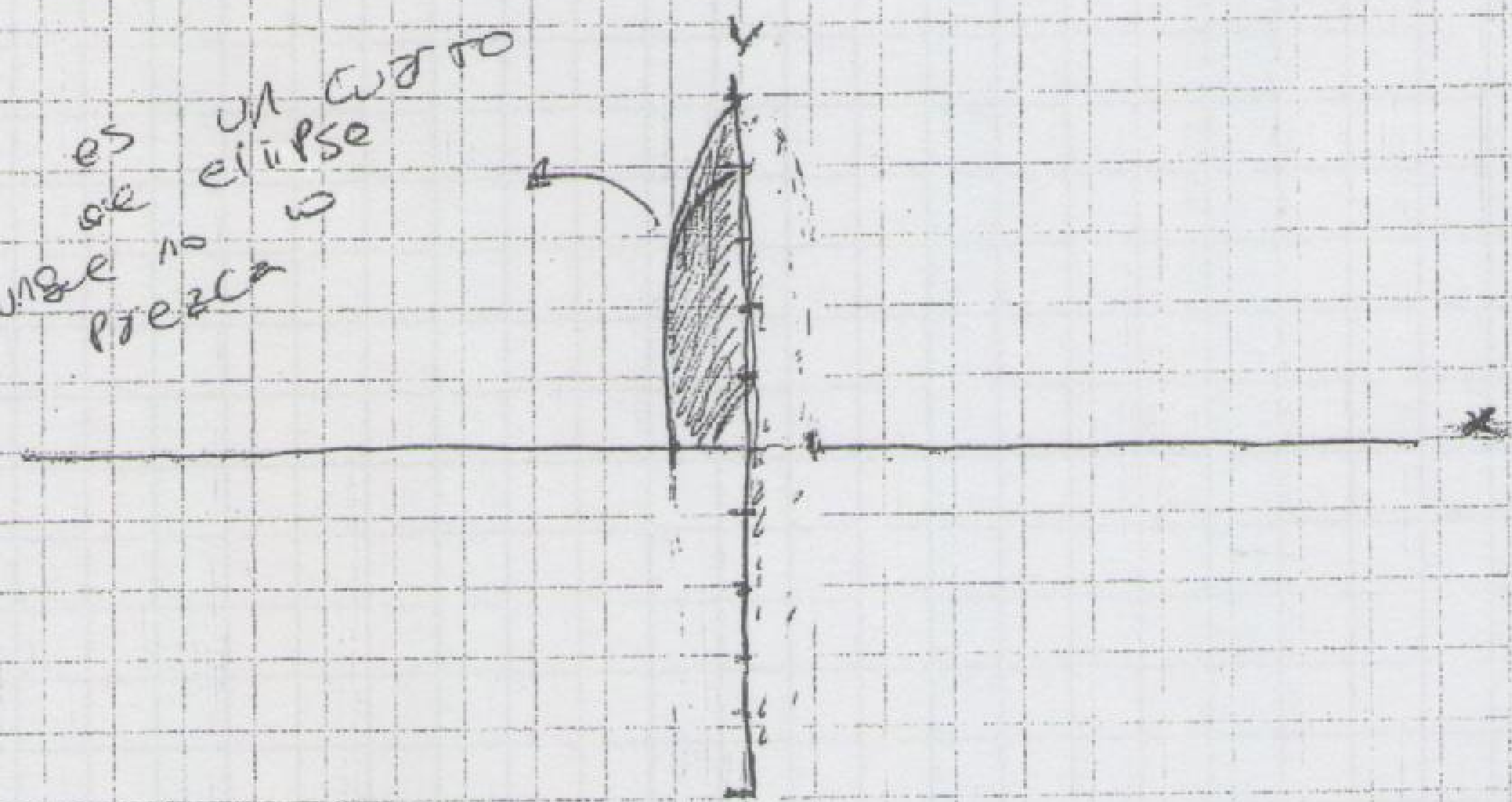
HOJA ~~6/6~~ 5/5

FECHA

(4) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \ , \ y \geq 0 \ ,$

$: x^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 \leq 1 \}$

es un cuarto de elipse aunque no parezca



utilizo cambio de variables polares

$x = r . \cos \theta$ $\qquad$ $0 < \leq r \leq 1$

$y = r . \operatorname{sen} \theta . 5$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$|J| = 5r$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$\iint_D e^{x^2 + (y/5)^2} = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 e^{r^2 \cos^2\theta + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cancel{25}}{\cancel{25}}} \cdot r \ dr \right] d\theta$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \left[\int_0^1 e^{r^2} 5r \, dr \right] d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{5e^{r^2}}{2} \right) \Big|_0^1 d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} 5\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= 5\left(\frac{e}{2}\theta - 1/2\,\theta\right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 5\left(\frac{e}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5e\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5}{2}\left(e\pi - \pi - \frac{e\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{e\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{4}\pi(e-1)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4} 5 \tilde{n} (e - 1) = \iint_D e^{x^2 + (y/5)^2}}$$

y ya se que avisaste lo del angulo pero