1	2	3	4	5		Calif.
B-	B	R	-	B		A

Apellido y Nombre.
Turno: ☑ Mañana (8

Álgebra I - 2do Cuatrimestre 2016

Segundo Recuperatorio del Primer Parcial - 16/12/2016

1. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ y sea $B = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$. Definimos la relación $\mathcal{R} \subseteq B \times B$ de la siguiente forma:

$$X\mathcal{R}Y \iff \max X \leq \min Y.$$

   a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

   b) Determinar cuántos son los $X \in B$ que verifican simultáneamente:

   - $\{1, 2, 3, 5\}\mathcal{R}X$.
   - $X\mathcal{R}\{16, 17, 18, 19\}$.

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

3. Calcular la cantidad de funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ que cumplen simultáneamente:

   - $f(1) < f(7)$.
   - $f(3)$ es par.

4. Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números enteros definida como $a_1 = 3, a_2 = 8$ y para todo $n \geq 2$,

$$a_{n+1} = 6a_n^3 + 24a_{n-1} + 19^{2n+1}.$$

   Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $a_n \equiv 3(5)$.

5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $a_n = 10 + n^2$. Sea $d_n = (a_n : a_{n+1})$. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales d_n alcanza el mayor valor posible.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 1

$A = \{n \in \mathbb{N} / n \le 20\} = \{1,2,3,4,\dots,20\}$

$B = \mathcal{P}(A) - \{0\}$

$X \mathcal{R} Y \iff \max X \le \min Y$

a). Reflexiva: ¿$\forall X$, $X \mathcal{R} X$?

$X \mathcal{R} X \iff \max X \le \min X$

$\mathcal{R}$ no es reflexiva, contraejemplo: si tengo $X = \{1,2,3,4\} \Rightarrow \max X = 4$ y $\min X = 1$, y $4 \not\le 1$ ✓

- Simétrica. $\forall x, y \in B$, ¿$X \mathcal{R} Y \Rightarrow Y \mathcal{R} X$?

$\mathcal{R}$ no es simétrica. Contraejemplo: tomo

$X = \{1,2,3,4\}$; $Y = \{5,6,7,8\}$

$\max X = 4 \le \min Y = 5$, pero

$\max Y = 8 \not\le \min X = 1$, entonces $X \mathcal{R} Y \not\Rightarrow Y \mathcal{R} X$ ✓

- Antisimétrica, $\forall X, Y \in B$, $(X \mathcal{R} Y \Rightarrow Y \mathcal{R} X) \iff X = Y$

no; $\mathcal{R}$ no es antisimétrica. Contraejemplo: tomo $X = Y = \{1,2,3,4\}$

$\Rightarrow \max X = \max Y = 4$ y $\min X = \min Y = 1$ pero $4 \not\le 1$

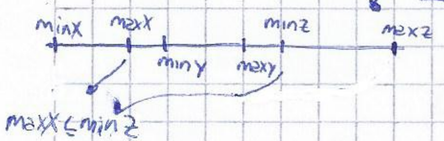
antisimétrica es $X \mathcal{R} Y$, $Y \mathcal{R} X \Rightarrow X = Y$, no lo [illegible]

- Transitiva., Suponiendo $X \mathcal{R} Y$, $Y \mathcal{R} Z$. ¿Vale $X \mathcal{R} Z$?

$$\begin{cases} X \mathcal{R} Y \iff \max X \le \min Y \\ Y \mathcal{R} Z \iff \max Y \le \min Z \end{cases}$$

Como $\underbrace{\max X \le}\ \min Y \le \max Y\ \underbrace{\le \min Z}$

por transitividad de la desigualdad



$\max X \le \min Z$

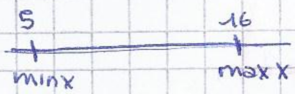
$\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ es transitiva ✓

sigue atrás

NOTA

b) debe cumplirse:

$$\begin{cases} \{1,2,3,5\}\,\mathcal{R}\,X \Rightarrow 5 \leq \min X \\ X\,\mathcal{R}\,\{16,17,18,19\} \Rightarrow \max X \leq 16. \end{cases}$$



Como ambas condiciones deben cumplirse simultaneamente, el conjunto X sólo puede tener los elementos de: $\{5,6,7,\dots,15,16\}$

• $X \in B = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$, $\Rightarrow$ serán los elementos del conjunto de partes de A que no contengan a $\{1,2,3,4,17,18,19,20\}$ (8 elementos) ni al vacío.

La cantidad de partes de A que no tienen esos elementos es: $2^{20-8}\underbrace{-1}_{\text{el conj. vacío}} = 2^{12}-1$

Ejercicio 2

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$; probar que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lo pruebo por inducción:

$P(1)$: $\prod_{i=1}^{1} \frac{2i-1}{2i} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ ✓

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Supongo que vale para n. veo si vale para $n+1$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \cdot \prod_{i=n+1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \underset{\text{Por HI}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}}_{\text{Veo si esto es } \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}}$$

multiplico por 1

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+4}} = \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}}_{\leq 1 \ (*)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

entonces $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

Queda demostrado que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

(*) ¿ $\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq 1$?

elevo al cuadrado:

¿ $\frac{3n+4}{3n+1} \cdot \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} = \frac{12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4}{12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4} \leq 1^2$?

¿ $\frac{12n^3+28n^2+19n+4}{12n^3+28n^2+20n+4} \leq 1$?

$$\cancel{12n^3}+\cancel{28n^2}+19n+\cancel{4} \leq \cancel{12n^3}+\cancel{28n^2}+20n+\cancel{4}$$

$$19n \leq 20n \quad ✓ \longrightarrow \sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$

NOTA $19 \leq 20$.

Ejercicio 5

$a_n = 10 + n^2$
$a_{n+1} = 10 + n^2 + 2n + 1$ $\Big\}$ $(10+n^2 : n^2+2n+11) = d_n$.

- $d_n \mid n^2+10$, $d_n \mid n^2+2n+11$ $\Big\}$ $d_n \mid \cancel{n^2}+2n+11-\cancel{n^2}-10 = 2n+1 \Rightarrow d_n \mid 2n+1$
- $d_n \mid 2n+1 \rightarrow d_n \mid 2n^2+n$, $d_n \mid n^2+10 \rightarrow d_n \mid 2n^2+20$ $\Big\}$ $d_n \mid \cancel{2n^2}+n-\cancel{2n^2}-20 \Rightarrow d_n \mid n-20$.
- $d_n \mid n-20 \rightarrow d_n \mid 2n-40$, $d_n \mid 2n+1$ $\Big\}$ $d_n \mid \cancel{2n}+1-\cancel{2n}+40 \Rightarrow \boxed{d_n \mid 41}$ — 41 primo.

Corroboro ~~si~~ si $d_n = 1$ o 41, y evalúo para qué valores de n se cumple.

- $10 + n^2 \equiv 0\ (41)$

  $n^2 \equiv -10 \equiv 31\ (41)$.

- $n^2+2n+11 \equiv 0\ (41)$

  $n^2+2n \equiv 30\ (41)$, con $n^2 \equiv 31$, $2n \equiv 2\cdot 20$

  $31 + 40 \equiv 71 \equiv 30\ (41)$ ✓
  (si $n \equiv 20(41)$)

- $n^2+2n \equiv 30(41)$, con $n^2 \equiv 31$, $2n \equiv 2\cdot 21$

  $31 + 42 \equiv 73 \equiv 32\ (41)$ ✗

~~veo~~ a simple vista que $20^2 \equiv 31\ (41)$ por lo que puedo suponer $n \equiv 20\ (41)$

↳ Esto se comprueba mediante tabla de restos módulo 41.

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28...
n^2	33	31	31	33	...					

(verifiqué estos valores con calculadora. copio los más relevantes, es decir, los que marcan el eje de simetría para la tabla de restos de n^2).

El mayor valor posible que puede alcanzar d_n es 41.
para que sea posible debe cumplirse que $n \equiv 20\ (41)$

ej $d_n = (10 + 61^2 : 61^2 + 2\cdot 61 + 11) = (3731 : 3854) =$ ~~...~~ (tomando $n = 61 \equiv 20(41)$)

$= (41\cdot 91 : 41\cdot 94) = 41\cdot \underbrace{(91 : 94)}_{\text{coprimos}} = 41\cdot 1 = 41$ ✓

NOTA la demo te dice que esos n cumplen.