1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: VEKSEIMAN NATÁN LIBRETA Y NO. DE ORDEN: 338/21 , 100
CARRERA: COMPUTACIÓN CUATR. APROBACIÓN TPs: 1ER C 2021
¿LLENÓ LA ENCUESTA? SI CUATR. APROBACIÓN TALLER: 1ER C 2021

Algebra I
Examen Final (4/8/2021)

---

1. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(a,b) = 18\,a + 60\,b.$$

   (a) Decidir si f es inyectiva y si no lo es, describir el conjunto $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : f(a,b) = 0\}$.

   (b) Decidir si f es sobreyectiva, y si no lo es describir $\mathrm{Im}(f)$.

---

2. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $96\,a \equiv 51 \pmod{27}$. Calcular $(4a^2 - a + 3 : 16a^2 + 9)$.

---

3. (a) Probar que si $\omega = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces

$$X^2 + X - 1 = \big(X - (\omega + \omega^{-1})\big)\big(X - (\omega^2 + \omega^{-2})\big).$$

   (b) Calcular, justificando cudadosamente, el valor exacto de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

---

4. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ la sucesión de polinomios definida recursivamente por:

$$\begin{cases} f_1 = X^2 - 6X + 9, \quad f_2 = X^3 - 5X^2 + 3X + 9, \\ f_{n+2} = (X^2 - 9)\, f_{n+1} f_n'' + f_{n+1}' f_n' + f_n^2\,(X-2)^n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Probar que 3 es raíz de multiplicidad 2 (exactamente) de f_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

Hoja 1 - CARILLA 1

VEKSEIMAN NATÁN

① ⓐ f es Inyectiva $\Leftrightarrow$ ($f(a,b) = f(c,d) \Leftrightarrow$ $a = c$ y $b = d$) observo que f no es Inyectiva y lo demuestro a partir de un CONTRAejemplo.

$f(7,-2) = 6 = f(-3,1)$ pero $7 \neq -3$

por lo tanto ~~los pa~~ la Inyectividad ES FALSA

- como la Inyectividad es falsa busco el conjunto $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 / f(a,b) = 0\}$

$18a + 60b = 0$

$6 \cdot (3a + 10b) = 0$

$a = \frac{-10b}{3} \quad \vee \quad a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \mid -10b$

pero 3 es primo y $3 \nmid -10 \Rightarrow 3 \mid b$

o mismo $-10b \equiv 0\ (3) \Rightarrow 2b \equiv 0\ (3)$ y $2 \perp 3$

$b \equiv 0\ (3) \Rightarrow b = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$

$a = \frac{-10b}{3}$ y $b = 3k \Rightarrow a = -10k$

conclusion $f(a,b) = 0 \Leftrightarrow \underline{a = -10k \ \vee \ b = 3k}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{18(-10k) + 60 \cdot (3k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

ese es el Conjunto $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 / f(a,b) = 0$

$\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 / a = -10k,\ b = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Escaneado con CamScanner

① ⓑ $f(a,b) = 18a + 60b$

$f(a,b) = 6(3a + 10b)$

observo que f <u>NO</u> es sobreyectiva

la definición de $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ por lo tanto

cualquier valor $\in \mathbb{Z}$ debería existir

$f(a,b) = N \,/\, N \in \mathbb{Z}$

observo $N = 2 \Rightarrow f(a,b) = 2$

$\cancel{10}\ 6(3a + 10b) = 2$

pero $3a + 10b \in \mathbb{Z}$ ya que $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

pero $\cancel{\nexists}$ $6 \nmid 2$ por lo tanto concluyo

que $\nexists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, f(a,b) = 2$

contraejemplo mostrado $\Rightarrow$ f no es sobreyectiva

~~como f?~~

$\cancel{f}$: $f(a,b) = 6 \cdot (3a + 10b)$ y $f(a,b) \in \mathbb{Z}$

~~/~~ como mínimo $f(a,b) \equiv 0 \ (6)$

~~qvq: $3a + 10$ $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, 3a + 10b = k$~~

qvq: $3a + 10b$ $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, 3a + 10b = j \,/\, j \in \mathbb{Z}$ ~~$3a + 10b = j \in \mathbb{Z}$~~

observo $3a + 10b = 1 \Rightarrow \cancel{a}\ b = \frac{1 - 3a}{10}$

pero $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \equiv 3a \ (10)$

SIGUE

~~Sibt~~ SIGUE el ej 1/6

Vimos que $f(a,b) = 6\cdot(3a+10b)$

observo que valores genera $3a+10b$

planteo $3a+10b=1 \Rightarrow b = \frac{1-3a}{10}$

pero $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \equiv 3a\ (10) \Rightarrow 21 \equiv 3a\ (10)$

y como $3 \perp 10$ $\quad 7 \equiv a\ (10)$

por lo tanto $a = 10k+7,\ k \in \mathbb{Z}$

$b = \frac{1-30k-21}{10} \Rightarrow b = -3k-2$

POR LO tanto

$$3\cdot(10k+7) + 10\cdot(-3k-2) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3\cdot(10k+7)\cdot J + 10\cdot(-3k-2)\cdot J = J \quad \forall (k,J) \in \mathbb{Z}^2$$

por lo tanto la función ~~g(k,J)~~ $g(a,b) = 3a+10b$

$\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ /\ g(a,b) = N,\ N \in \mathbb{Z}$

$f(a,b) = 6(3a+10b)$

tenemos $6\cdot$ (cualquier valor de $\mathbb{Z}$)

en definitiva la $Im(f) = 6\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$ o

todos los valores que cumplen $N \equiv 0\ (6)$

| Fin ejercicio 1 |

ESTO tiene sentido ya que el contraejemplo $N=2$ no ~~tenía~~ pertenecía a la $Im(f)$ y $2 \not\equiv 0\ (6)$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

Ejercicio ② $a \in \mathbb{Z} / 96a \equiv 51\ (27)$

$96a = 27k + 51 \Rightarrow 32a = 9k + 17$

$32a \equiv 17\ (9)$

$32a \equiv 44\ (9) \quad 4 + 9$

$8a \equiv 11\ (9) \Rightarrow 8a \equiv 56\ (9) \quad 8 + 9$

$\boxed{a \equiv 7\ (9)}$

~~Por~~ calculamos $(4a^2 - a + 3 : 16a^2 + 9)$ — (A) $= 4a^2 - a + 3$, (B) $= 16a^2 + 9$

por Euclides si $d \mid A$ y $d \mid B$ y $B = A \cdot q + r \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid r$: buscamos r

$$\begin{array}{l|l} 16a^2 + 9 & 4a^2 - a + 3 \\ 16a^2 - 4a + 12 & 4 \\ \hline +4a - 3 & \end{array}$$

$\Rightarrow d \mid 4a - 3$

$$\begin{array}{l|l} 4a^2 - a + 3 & 4a - 3 \\ 4a^2 - 3a & a \\ \hline 2a + 3 & \end{array}$$

$\Rightarrow d \mid 2a + 3$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{4}a - 3 & 2a + 3 \\ \cancel{4}a + 6 & 2 \\ \hline -9 & \end{array}$$

$= d \mid -9 \Rightarrow \boxed{d \mid 9}$

los divisores (+) de $9 = \{1, 3, 9\}$

Busco para que valores de a da 1

para que valores da 3 y 9

$\boxed{d = 1, 3 \text{ o } 9}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$4a^2 - a + 3 \overset{?}{\equiv} 0 \ (9)$?

tabla de valores

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4a^2-a+3 \ (9)$	3	6	8	0	0	8	6	3	8

Por lo tanto $9 \mid 4a^2 - a + 3 \iff a \equiv 3 (9)$ o $a \equiv 4 (9)$

pero por la condición Inicial sabemos que $a \equiv 7 \ (9)$

por lo tanto $9 \nmid 4a^2 - a + 3$ $\boxed{d = 1 \text{ o } 3}$

$(4a^2 - a + 3 : 16a^2 + 9) \neq 9$

observo: $4a^2 - a + 3 \equiv 0 \ (3)$?

$a^2 - a \equiv 0 \ (3)$?

TABLA de restos

a	0	1	2
$a^2-a (3)$	0	0	2

~~$a \equiv 2 (3)$~~
$a \equiv 0 \ (3)$ o
$a \equiv 1 \ (3)$

pero $a \equiv 7 (9) \Rightarrow a \equiv 7 (3) \Rightarrow a \equiv 1 (3)$

para todo a por la condición Inicial

$3 \mid 4a^2 - a + 3$

observo: $16a^2 + 9 \equiv 0 \ (3)$?

$a^2 \equiv 0 \ (3)$

Tabla de restos

a	0	1	2
$a^2 (3)$	0	1	1

Para que $3 \mid 16 \cdot a^2 + 9$
$a \equiv 0$ ~~(9)~~ (3)

pero Por la condición Inicial Sabemos que $a \equiv 1 (3)$

Por lo tanto $\forall a \quad 3 \nmid 16a^2 + 9$

descartamos $d = 9$, $d = 3$ RTA $(4a^2 - a + 3 : 16a^2 + 9) = 1$

ejercicio (3) (a) $w = e^{\frac{2}{5}\pi i} \in G_5$

$G_5 = \{ e^{\frac{2k\pi i}{5}} / k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq 4 \}$

observo que $w = w_1$ ya que $e^{\frac{2.(1)\pi i}{5}} = w$

y como $1 \perp 5 \Rightarrow w \in G_5^*$

Ahora tenemos el polinomio $x^2 + x - 1$

Tiene 2 Raices ~~x = a~~ (a y b)

$(x-a).(x-b) = x^2 - (a+b)x + a.b$

~~tengo que probar que~~

~~ta~~ Sabemos que $a+b = -1 \vee a.b = -1$

debo probar que $a = w + w^{-1} \vee b = w^2 + w^{-2}$

son las raices.

$(w + w^{-1}) + (w^2 + w^{-2}) \stackrel{?}{=} -1$

$w + w^{-1} \cdot \underbrace{w^5}_{1} + w^2 + w^{-2} \cdot \underbrace{w^5}_{1} \stackrel{?}{=} -1$

qvq: $w + w^2 + w^3 + w^4 \stackrel{?}{=} -1$

$\sum_{k=0}^{4} w_k = \sum_{k=0}^{4} w_1^k \; / \; w_1 \in G_5^* \quad 1 \perp 5$

$\sum_{k=0}^{4} w_1^k = \frac{\overset{=1}{w_1^5} - 1}{w_1 - 1} = 0$ / como $w_1 \in G_5^* \Rightarrow w_1 \neq 1$

$\sum_{k=0}^{4} w_1^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{4} w_1^k + 1 = 0$ ya que $w_1^0 = 1$

$w^4 + w^3 + w^2 + w = -1$ como queríamos probar

$x^2 - (w + w^2 + w^3 + w^4)x + (\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\text{PROBADO}}) =$

$= x^2 + x - 1$ ✓

Asamblea

Escaneado con CamScanner

falta ver que $A \cdot B = -1$

$A = \omega + \omega^{-1}$ $\quad B = \omega^2 + \omega^{-2}$

$A \cdot B = (\omega + \omega^{-1}) \cdot (\omega^2 + \omega^{-2}) = \omega^3 + \omega^{-1} + \omega^1 + \omega^{-3} \overset{?}{=} -1$

$\omega^3 + \omega^{-1} \cdot \omega^5 + \omega^1 + \omega^{-3} \cdot \omega^5 \overset{?}{=} -1$

$\boxed{\omega^3 + \omega^4 + \omega^1 + \omega^2 \overset{?}{=} -1}$

ya quedó probado que esta igualdad se cumple ✓

---

③ⓑ Ahora sabemos que $(\omega + \omega^{-1})$ es raíz del polinomio $x^2 + x - 1$ y $\omega^{-1} = \overline{\omega}$

Por lo tanto $(\omega + \overline{\omega})^2 + (\omega + \overline{\omega}) - 1 = 0$

Sabemos que $\omega = e^{\frac{2}{5}\pi i} \Rightarrow Re(\omega) = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ y sabemos que $\omega + \overline{\omega} = 2 Re(\omega)$

~~$x^2 + x - 1 = 0$~~

$(2 Re(\omega))^2 + 2 Re(\omega) - 1 = 0$

$4 Re^2(\omega) + 2 Re(\omega) - 1 = 0$

$A = 4$, $B = 2$, $C = -1$

~~$\frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2}$~~ $\quad \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} \rightarrow Re(\omega) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\rightarrow Re(\omega) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

sabemos que $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) > 0 \Rightarrow$

$Re(\omega) = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(4) $f_N \subseteq \mathbb{Q}[x]$ / $N \in \mathbb{N}$

$f_1 = x^2 - 6x + 9$ // $f_2 = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

$f_{N+2} = (x^2-9)\cdot(f_{N+1})\cdot(f''_N) + (f'_{N+1})\cdot(f'_N) + f_N^2\,(x-2)^N$

~~qvq: mult (f_{N+1} 3, f_{N+2}) = 2~~

Hi: ~~mult~~ mult$(f_N\ 3, f_N) = 2$, mult$(3, f_{N+1}) = 2$

qvq: mult$(3, f_{N+2}) = 2$

C.B = $f_1(3) = 0$ ✓, $f_1'(3) = 2.3 - 6 = 0$ ✓, $f_1'' = 2 \neq 0$ ✓

$f_2(3) = 0$ ✓, $f_2'(3) = 3.(3)^2 - 10.(3) + 3 = 0$ ✓, $f_2'' = 6(3) - 10 \neq 0$

Por def: $f_{N+2} = (x-3)(x+3)\, f_{N+1} \cdot f''_N + f'_{N+1} \cdot f'_N + f'_N\,(x-2)^N$

Teorema:

mult$(r, f) = x \Rightarrow$ mult$(r, f') = x-1$ // $x \geq 0$

Por teorema y Por Hi $\rightarrow$

$f_{N+1} = (x-3)^2 \cdot k$ / $x-3 \nmid k$

$f''_N = q$ / $x-3 \nmid q$

$f'_{N+1} = (x-3)\cdot j$ / $x-3 \nmid j$

$f'_N = (x-3)\cdot \ell$ / $x-3 \nmid \ell$

$(f_N)^2 = \cancel{x}(f_N)\cdot(f_N) = (x-3)^2 \cdot (x-3)^2 \cdot m^2$ / $x-3 \nmid m$

Reescribo f_{N+2} con las nuevas definiciones

$f_{N+2} = (x-3)^3 \cdot (x+3) \cdot k \cdot q + (x-3)^2 \cdot j \cdot \ell + (x-3)^4 \cdot m^2 \cdot (x-2)^N$

$f_{N+2} = (x-3)^2 \cdot \left((x-3)\cdot(x+3)\cdot k \cdot q + j \cdot \ell + (x-3)^2 \cdot m^2 \cdot (x-2)^N \right)$

ya sabemos que $(x-3)^2 \mid f_{N+2}$

Sigue $\longrightarrow$

debo observar x

$X-3 \mid (X-3)\cdot(x+3)\cdot k\cdot q + j\cdot l + (X-3)^2\cdot m^2\cdot(X-2)^N$

$$\underbrace{(x-3)\cdot(x+3)\cdot k\cdot q_1}_{\overset{!!!}{0}} + j\cdot l + \underbrace{(x-3)^2\cdot m^2\cdot(x-2)^N}_{\overset{!!!}{0}} \equiv 0\ (x-3)$$

$$j\cdot l \equiv 0\ (x-3)$$

$$(x-3) \mid j\cdot l$$

pero $(X-3)$ es un polinomio primo y $f_{N+2} \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow x-3 \mid j$ o $x-3 \mid l$

pero sabemos que esto no ocurre por lo tanto $(x-3)^2 \mid f_{N+2}$ y $(x-3)^3 \nmid f_{N+2}$ como queríamos probar.

Probado por Inducción Completa.

Asamblea