FINAL DE ÁLGEBRA I
(23-02-23)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

"Revives en el tiempo, delgada y silenciosa."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Se define en G_{30} la relación $\Re$ tal que, dados $z, w \in G_{30}$,

$$z \,\Re\, w \;\Leftrightarrow\; z \cdot \overline{w} \in G_5.$$

(a) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia en G_{30}.

(b) ¿Cuántas clases de equivalencia define esta relación?

Resolución:

(a) Reflexividad: sea $z \in G_{30}$. Veamos que $z \,\Re\, z$. Tenemos que

$$z \,\Re\, z \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot \overline{z} \in G_5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \in G_5$$

, cosa que vale (usamos que $\overline{z} = z^{-1}$ pues $z \in G_{30}$).

Simetría: sean $z, w \in G_{30}$ tales que $z \,\Re\, w$. Veamos que $w \,\Re\, z$. Tenemos que

$$w \,\Re\, z \quad \Leftrightarrow \quad w \cdot \overline{z} \in G_5 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{w \cdot \overline{z}} \in G_5 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{w} \cdot \overline{\overline{z}} \in G_5 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{w} \cdot z \in G_5$$

, que vale pues el producto es conmutativo y $z \Re w$.

Transitividad: sean $z, w, u \in G_{30}$ tales que $z \Re w$ y $w \Re u$. Veamos que $z \Re u$. Tenemos que

$$z \Re u \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot \overline{u} \in G_5 \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot 1 \cdot \overline{u} \in G_5 \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot \overline{w} \cdot w \cdot \overline{u} \in G_5$$

, cosa que vale, pues $z \cdot \overline{w}, w \cdot \overline{u} \in G_5$ pues $z \Re w$ y $w \Re u$, y G_5 es cerrado por la multiplicación.

Se concluye así que $\Re$ es una relación de equivalencia.

(b) Sean $z, w \in G_{30}$ tales que $z \Re w$. Luego, existen $0 \leq j, k < 30$ tales que

$$z = e^{\frac{2j\pi}{30} i} \text{ y } w = e^{\frac{2k\pi}{30} i}$$

y por lo tanto,

$$z \cdot \overline{w} = e^{\frac{2j\pi}{30} i} \cdot \overline{e^{\frac{2k\pi}{30} i}} = e^{\frac{2j\pi}{30} i} \cdot e^{\frac{-2k\pi}{30} i} = e^{\frac{2(j-k)\pi}{30} i} \in G_5$$

$$\Leftrightarrow (e^{\frac{2(j-k)\pi}{30} i})^5 = 1 \quad \Leftrightarrow e^{\frac{(j-k)\pi}{3} i} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, l \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{(j-k)\pi}{3} = 2l\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, l \in \mathbb{Z} \text{ tal que } j - k = 6l \quad \Leftrightarrow j - k \equiv 0 \pmod 6.$$

Luego, como hay seis restos posibles en la división por 6, hay a lo sumo seis clases de equivalencia. Además, tal cantidad es mayor o igual a seis, pues como $j - k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ para todo $0 \leq j, k < 6$ con $j \neq k$, la clases de equivalencia $[z_0]$,..., $[z_5]$ son todas distintas entre sí (donde $z_j = e^{\frac{2j\pi}{30} i}$). Se concluse así que $\Re$ define seis clases de equivalencia en G_{30}.

■

Ejercicio 2

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números enteros definida recursivamente por

$$a_1 = 10 \text{ y } \quad a_{n+1} = 6a_n + 14^{n+2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a_n : 2^{n+3}) = 2^n$.

Resolución:

Empecemos notando que

$$(a_n : 2^{n+3}) = 2^n \iff 2^n \mid a_n \ \text{ y } \ 2^{n+1} \nmid a_n.$$

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : \ 2^n \mid a_n \ \text{ y } \ 2^{n+1} \nmid a_n.$$

Veamos que vale $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ se tiene que $a_1 = 10$, y por lo tanto $2 \mid a_1$ y $2^2 \nmid a_1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdadera $P(n)$ y veamos que lo es $P(n+1)$.

En primer lugar tenemos que

$$a_{n+1} = 6a_n + 14^{n+2} = 3 \cdot 2a_n + 2^{n+2} \cdot 7^{n+2} \equiv 3 \cdot 0 + 0 \cdot 7^{n+2} \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$$

, pues por H. I. resulta que $2^n \mid a_n$, y por lo tanto $2^{n+1} \mid 2a_n$.

En segundo lugar,

$$a_{n+1} = 6a_n + 14^{n+2} = 3 \cdot 2a_n + 2^{n+2} \cdot 7^{n+2} \equiv 3 \cdot 2a_n + 0 \cdot 7^{n+2} \equiv 3 \cdot 2a_n \pmod{2^{n+2}}$$

, así que $2^{n+2} \nmid a_{n+1}$ pues por H. I. resulta que $2^{n+1} \nmid a_n$, y por lo tanto $2^{n+2} \nmid 2a_n$.

Probado el caso base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Ejercicio 3

Hallar el resto de $15^{24^{n^2}}$ en la división por 11 para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resolución:

Como 11 es primo y $11 \nmid 15$, por el PTF se tiene que

$$15^{24^{n^2}} \equiv 15^{r_{10}(24^{n^2})} \pmod{11}$$

, así que necesitamos calcular $r_{10}(24^{n^2})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como $10 = 2 \cdot 5$ y $2 \perp 5$, resulta que

$$24^{n^2} \equiv r \pmod{10} \quad \Leftrightarrow \quad 24^{n^2} \equiv r \pmod{2} \quad \text{y} \quad 24^{n^2} \equiv r \pmod{5}.$$

Por un lado tenemos que

$$24^{n^2} \equiv 0^{n^2} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Por otro lado,

$$24^{n^2} \equiv (-1)^{n^2} \pmod{5}$$

, así que si n es par resulta

$$24^{n^2} \equiv 1 \pmod{5}$$

, y si n es impar

$$24^{n^2} \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Entonces, por el TCR, si n es par,

$$24^{n^2} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{y} \quad 24^{n^2} \equiv 1 \pmod{5} \quad \Leftrightarrow \quad 24^{n^2} \equiv 6 \pmod{10}$$

, y por lo tanto

$$15^{24^{n^2}} \equiv 15^{r_{10}(24^{n^2})} \equiv 15^6 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Si n es impar,

$$24^{n^2} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{y} \quad 24^{n^2} \equiv 4 \pmod{5} \quad \Leftrightarrow \quad 24^{n^2} \equiv 4 \pmod{10}$$

, y por lo tanto

$$15^{24^{n^2}} \equiv 15^{r_{10}(24^{n^2})} \equiv 15^4 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Se concluye así que $r_{11}(15^{24^{n^2}}) = 4$ si n es par y $r_{11}(15^{24^{n^2}}) = 3$ si n es impar.

■

Ejercicio 4

Sea $a \in \mathbb{Z}$ y sea

$$f = X^7 - X^6 + \frac{3}{2}aX^4 - 2aX^3 - X + \left(1 + \frac{a}{2}\right) \in \mathbb{Q}[X].$$

(a) Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$, f tiene al menos un raíz múltiple entera.

(b) Para cada valor de $a \in \mathbb{Z}$, determinar todas las raíces enteras que son múltiples y su multiplicidad.

Resolución:

(a) Como las raíces multiples de f son aquellas raíces de f que también son raíces de f', buscamos las raíces enteras de f'. Tenemos que

$$f' = 7X^6 - 6X^5 + 6aX^3 - 6aX^2 - 1.$$

Como $f' \in \mathbb{Z}[X]$, usamos el lema de Gauss para encontrar sus raíces enteras. Los candidatos son -1 y 1 (notar que no necesitamos las raíces racionales que no son enteras). Luego, $f'(-1) = 12$, $f'(1) = 0$ y $f(1) = 0$, lo que implica que 1 es raíz multiple de f para todo $a \in \mathbb{Z}$.

(b) Por lo hecho en el ítem anterior la única raíz entera múltiple de f es 1. Veamos cuál es su multiplicidad. Tenemos que

$$f'' = 42X^5 - 30X^4 + 18aX^2 - 12aX$$

, y entonces $f''(1) = 12 + 6a$. Luego, $f''(1) = 0$ si y sólo si $a = -2$.

Si $a = -2$,

$$f''' = 210X^4 - 120X^3 + 36 \cdot (-2)X - 12 \cdot (-2) = 210X^4 - 120X^3 - 72X + 24$$

, y entonces $f'''(1) = 42$.

Se concluye que $mult(1, f) = 2$ si $a \neq -2$ y $mult(1, f) = 3$ si $a = -2$.

$\blacksquare$