Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Parcial (01/10/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 2

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B/B	B	B	10

Apellido: Gonzalez Dardik Nro. de libreta: 1143/22 Nro de práctica: 2

Nombre: Micaela Natalí Carrera: Lic. Cs. de Datos

1. Sea C la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(y-3)^2 + z^2 = 9 \text{ y } x + y + z = -1.$$

(a) Hallar una parametrización de C.

(b) Hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente a C en el punto $P = (-7, 3, 3)$.

---

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{(x-2)\sin^2(y+2)}{(x-2)^2 + (y+2)^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)\sqrt{|y|}\,(x+3)}{y + (x-2)^2}$.

---

3. Estudiar la diferenciabilidad en **todo punto** de $\mathbb{R}^2$ para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

---

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Sabiendo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1,-1) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,-1) = 2 \ y \ \lim_{t\to 2} f(t^3 - 3t - 1, e^{t-2} - t) = 10.$$

(a) Hallar $\nabla f(1,-1)$.

(b) Hallar el plano tangente al gráfico de

$$g(s,t) = f\left(s^2 + t^2, s^2(t+1) - e^s\right)$$

en el punto $(0, 1, g(0,1))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

① Sea Ⓒ la curva que se obtiene al intersecar:

$$\begin{cases} (A)\ (y-3)^2 + z^2 = 9 \implies z^2 = 9 - (y-3)^2 \\ (B)\ x + y + z = -1 \implies z = -1 - y - x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \boxed{x = -y - z - 1} \end{cases}$$

$A \cap B$: $\cancel{(y-3)^2 + (-1-y-x)^2 = 9 \quad y^2 - 6y + 9 +}$

NO

A ~~....~~ es ~~una~~ un ~~circunferencia~~ cilindro (circunf con x libre).

lo paso a polares / parametrizo: ✓

$$\langle x,\ 3\,\text{sen}\,\theta + 3,\ 3\cos\theta \rangle =$$

$$A \cap B: \left\langle \underbrace{-y - z - 1}_{\text{por } B},\ \overbrace{3\,\text{sen}\,\theta + 3}^{y},\ \overbrace{3\cos\theta}^{z} \right\rangle =$$

$$\left\langle \overbrace{-3\,\text{sen}\,\theta - 3}^{-y}\ \overbrace{-\ 3\cos\theta}^{-z}\ \overbrace{-1}^{-1},\ 3\,\text{sen}\,\theta + 3,\ 3\cos\theta \right\rangle$$

entonces:

(a) $\boxed{\text{RTA}}$ 1 (a)

$$C = \boxed{r(\theta) = \langle -3(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) - 4,\ 3\,\text{sen}\,\theta + 3,\ 3\cos\theta \rangle}$$

(b) en la siguiente página.

Buscamos en cual θ es $(-7,3,3)$

(b) $r(?) = (-7, 3, 3)$

(2)

$$\begin{cases} -7 = -3(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - 4 \Rightarrow \boxed{\theta = 0} \\ 3 = 3\operatorname{sen}\theta + 3 \Rightarrow \boxed{\theta = 0} \\ 3 = 3\cos\theta \Rightarrow \boxed{\theta = 0} \end{cases}$$

$$r'(\theta) = \langle -3\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, -3\operatorname{sen}\theta \rangle$$

derivo cada término por ser una función de varios parámetro,

evalúo en mi θ hallado:

$$\boxed{r'(0) = \langle -3, 3, 0 \rangle}$$ → pendiente de la L_{tg} en P

Rta (1)(b)

$$\boxed{L_{tg\,C_{(-7,3,3)}} = \lambda(-3, 3, 0) + (-7, 3, 3)}$$

Bien!

Micaela González Dardik

P2

2

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{(x-2)\sin^2(y+2)}{(x-2)^2+(y+2)^2}$

- No se puede hacer Algebra de límites porque quedaría una indeterminación. ✓

↳ Hago cambio de variable

$u = (x-2)$ $\qquad$ $v = (y+2)$

$u \to 0$ ✓ $\qquad$ $v \to 0$ ✓

AHORA:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u \cdot \sin^2(v)}{u^2+v^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u \cdot \sin(v) \cdot \sin(v)}{u^2+v^2}$$

1) PRUEBO ITERADOS:

- $u=0$, $v\to 0$: $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{0 \cdot \sin^2(v)}{v^2} = \dfrac{0}{v} = \boxed{0}$ ✓

- $v=0$, $u\to 0$: $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u \cdot \sin^2(0)}{u^2} = \dfrac{0}{u^2} = \boxed{0}$ ✓

2) PRUEBO RECTA $u = v$

- $u=v$ $\quad \lim\limits_{(u,u)\to(0,0)} \dfrac{u \cdot \sin^2(u)}{u^2+u^2} = \lim\limits_{(u,u)\to(0,0)} \dfrac{u \cdot \sin(u) \cdot \sin(u)}{u\,(u+1)^2}$

$2u^2$

P3 $\qquad$ Micaela Gonz. Pard. $\qquad$ sigo en la prox pag

$$\lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{\sin(u)}{u}\cdot\frac{\sin(u)\cdot u}{(u+1)} = \boxed{0}$$

3) PRUEBO LA CURVA $v = u^2$

$$\lim_{(u,u^2)\to(0,0)} \frac{u\cdot \sin(u^2)\sin(u^2)}{u^2+u^2} = \lim_{(u,u^2)\to(0,0)} \frac{\sin(u^2)\,\sin(u^2)\cdot u}{2u^2} = \boxed{0}$$

4) El cero parece ser un buen candidato... revisemos de vuelta el límite a ver ~~si~~ quizás es un 0. acotado...

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u\cdot\sin(v)\sin(v)}{u^2+v^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{v^2}{v^2}\,\frac{u\cdot\sin(v)\sin(v)}{(u^2+v^2)}$$

$\boxed{\frac{v^2}{v^2}=1}$ → no afecta

$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\sin(v)\sin(v)}{v\cdot v}\cdot\frac{u\cdot v^2}{(u^2+v^2)} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\sin(v)\sin(v)}{v\cdot v}\;\boxed{\frac{u\cdot v^2}{u^2+v^2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$$

como están elevados a potencia par no pueden ser < 0.

$$0 \le \boxed{\frac{v^2}{u^2+v^2}} \le \frac{v^2+u^2}{v^2+u^2} = 1$$

ENTONCES:

$$\Rightarrow \lim_{(u,v)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin(v)}{v}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(v)}{v}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{v^2}{v^2+u^2}}_{\text{ACOTADO}}\cdot \overset{\to 0}{u} = 1.1.0.\text{acotado} = \boxed{0}$$

⟹ Por la Propiedad del cero. acotado quedа demostrado que el límite ∃ y es cero.

(En base de cero, ... [illegible])

(b) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)\sqrt{|y|}\ (x+3)}{y+(x-2)^2}$$

1) Realizo cambio de variable (por comodidad)

$u = x-2$

$u \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{(u,y)\to(0,0)} \frac{u\sqrt{|y|}\ (u+5)}{y+(u)^2}$$

2) PRUEBO ITERADOS PARA HALLAR UN CANDIDATO:

- $y=0$, $u\to 0$: $$\lim_{u\to 0} \frac{u \cdot 0 \cdot (u+5)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{0}{u^2} = \boxed{0}\ \checkmark$$

- $u=0$, $y\to 0$: $$\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot\sqrt{|y|}\cdot 5}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = \boxed{0}\ \checkmark$$

¡Bien! Tenemos a nuestro candidato a límite.

Si el límite $\exists \Rightarrow$ TIENE QUE SER CERO

3) PRUEBO LA RECTA $y=u$

$$\lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{u\cdot\sqrt{|u|}\ (u+5)}{u+u^2} = \lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{\cancel{u}\cdot\sqrt{|u|}\cdot(u+5)}{\cancel{u}(u+1)}$$

$$= \lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{0\cdot(u+5)}{(u+1)} = \lim_{u\to 0}\frac{0}{u+1} = \boxed{0}\ \checkmark$$

Mmm... probemos en la siguiente página la recta $y=u^2$. Creo que vi algo. PS

(b) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)\sqrt{|y|}\quad(x+3)}{y+(x-2)^2}$$

1) Realizo cambio de variable (por comodidad)

$u = x-2$

$u \to 0$ $\Longrightarrow$ $$\lim_{(u,y)\to(0,0)} \frac{u\sqrt{|y|}\quad(u+5)}{y+(\text{[illegible]})^2}$$

2) PRUEBO ITERADOS PARA HALLAR UN CANDIDATO:

- $y=0$, $u\to 0$: $$\lim_{u\to 0} \frac{u\cdot 0\cdot(u+5)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{0}{u^2} = \boxed{0} \checkmark$$

- $u=0$, $y\to 0$: $$\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot\sqrt{|y|}\cdot 5}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = \boxed{0} \checkmark$$

¡Bien! Tenemos a nuestro candidato a límite.

Si el límite $\exists$ $\Rightarrow$ TIENE QUE SER CERO

3) PRUEBO LA RECTA $y=u$

$$\lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{u\cdot\sqrt{|u|}\quad(u+5)}{u+u^2} = \lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{\cancel{u}\cdot\sqrt{|u|}\cdot(u+5)}{\cancel{u}(u+1)}$$

$$= \lim_{(u,u)\to(0,0)} \frac{0\cdot(u+5)}{(u+1)} = \lim_{u\to 0}\frac{0}{u+1} = \boxed{0} \checkmark$$

Mmm... probemos en la siguiente página la recta $y = u^2$. Creo que vi algo.

PS

4) pruebo $y = x^2$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x \cdot \sqrt{|x^2|}\,(x+5)}{x^2+x^2} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x \cdot |x|\,(x+5)}{2x^2}$$

LISTO, ya casi. Ahora hay ~~2~~ casos donde $L \neq 0$. (con 1 era suficiente)

i) $x>0$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{|x|\cdot|x|\,(x+5)}{2x^2} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{\cancel{x^2}\,(\overset{\to 0}{x}+5)}{2\cancel{x^2}} \overset{A.L.}{=} \boxed{\frac{5}{2}} \neq 0$$

ii) $x<0$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{-\cancel{x^2}\,(\overset{\to 0}{x}+5)}{2\cancel{x^2}} \overset{A.L.}{=} \boxed{\frac{-5}{2}} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Como hay aunque sea 1 curva donde el límite no es cero, es decir, en 2 curvas tenemos límites distintos, el Límite $\nexists$.

Bien!

Micaela Gonz Dard.

3) Estudiar la diferenciabilidad en TODO PUNTO de $\mathbb{R}^2$ para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

□ En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ la función es diferenciable ya que son sumas, restas, divisiones, operaciones entre funciones C^1 (polinomios en este caso). ✓

□ Nuestro punto más conflictivo va a ser el $(0,0)$.

- Para que una función sea diferenciable, este límite debe existir (y ser cero):

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\overbrace{f(x,y)}^{a} - \overbrace{f(x_0,y_0)}^{b} - \overbrace{f_x(x_0,y_0)}^{c}(x-x_0) - \overbrace{f_y(x_0,y_0)}^{d}(y-y_0)}{\|(x,y)\|} = 0.$$ ✓

a) $(0,0)$ después lo vamos a ver.

b) Ya la tenemos definida: "$\boxed{0}$ si $(x,y) = (0,0)$" ✓

c) Busca la derivada parcial en x en la siguiente página. Lo voy a hacer por definición ya que es una función partida →

P7

· DER. PARCIAL EN X (por definición)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3 - 0^4}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h^3}{\cancel{h^2}} = h \overset{A.L.}{=} \boxed{0} = \boxed{f_x(0,0)}$$ ✓

d) ✓

· DER PARCIAL en Y (por definición)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h} = \frac{0^3 - h^4}{\sqrt{0^2+h^2}} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-h^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{h.h}} = -h^2 \overset{A.L.}{=} \boxed{0} = \boxed{f_y(0,0)}$$ ✓

· Listo, tenemos b), c) y d). Volvamos al límite y chequeemos si es cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3-y^4}{(x^2+y^2)^{1/2}} - 0 - 0 - 0}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{(x^2+y^2)^1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{y^4}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ACOTADO}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} - \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{ACOTADO}} \cdot \underbrace{y^2}_{\to 0} = 0.\text{acotado} - 0.\text{acotado} = \boxed{0}$$ ✓

$$\boxed{0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}$$ ACOTADO

$$\boxed{0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le \frac{y^2+x^2}{y^2+x^2}}$$ ACOTADO

BIEN!

Micaela G. Durá

(prox pag)

P8

Como el L $\exists$ y es igual a cero, la función es efectivamente diferenciable en el $(0,0)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La } f \text{ es diferenciable en todo } \mathbb{R}^2}$ ✓

4 (a) Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable

DATOS:

- $u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$
- $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
- (A) $\frac{df}{du}(1,-1) = 0$
- (B) $\frac{df}{dv}(1,-1) = 2$
- $\lim_{t \to 2} f\left(t^3 - 3t - 1, e^{t-2} - t\right) = 10$

1) Sabemos:

(A) $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{(1,-1)} (u_1, u_2) = 0$ ✓ $\Rightarrow \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{(1,-1)} \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{x(1,-1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + f_{y(1,-1)} \cdot \frac{-1}{\sqrt{10}} = 0 \Rightarrow f_{x(1,-1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = f_{y(1,-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{x(1,-1)} = f_{y(1,-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{10}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{10}}}{3} \Rightarrow \boxed{f_{x(1,-1)} = \frac{1}{3} f_{y(1,-1)}}$ ✓

P9 Micaela Gonz Dard

sigo en la sig

(b) $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{(1,-1)} \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 2 \Rightarrow f_{x_{(1,-1)}} \cdot \frac{3}{5} + f_{y_{(1,-1)}} \cdot \frac{4}{5} = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{5}\left(3 f_{x_{(1,-1)}} + 4 f_{y_{(1,-1)}}\right) = 2 \Rightarrow \boxed{3 f_{x_{(1,-1)}} + 4 f_{y_{(1,-1)}} = 10}$

¡Bien! Ahora unifiquemos nuestras 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 f_{x_{(1,-1)}} + 4 f_{y_{(1,-1)}} = 10 \\ 3 f_{x_{(1,-1)}} = f_{y_{(1,-1)}} \end{cases}$$

$$\cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} f_{y_{(1,-1)}} + 4 f_{y_{(1,-1)}} = 10$$

$$5 f_{y_{(1,-1)}} = 10$$

$$\boxed{f_{y_{(1,-1)}} = 2} = \boxed{2} \checkmark$$

$$\boxed{f_{x_{(1,-1)}} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{2}{3}} \checkmark$$

3) Nuestro $\nabla f(1,-1)$ es:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b) Ahora para hallar el plano tangente.

SABEMOS:

- $g(s,t) = f(h(s,t))$
- $g(0,1) = f(h(0,1))$
- $\lim_{t\to 2} f(\cancel{t^3-3t-1}, \cancel{e^{t-2}-t}) = 10$

$\lim_{t\to 2} f(1,-1) = 10$

- y los datos de antes (a)
  - $g(0,1) = f(\underbrace{s^2+t^2}_{x}, \underbrace{s^2(t+1)-e^s}_{y})$

$g(0,1) = f(0^2+1^2, 0^2(1+1)-e^0)$

$g(0,1) = f(1,-1) = \boxed{10}$

1) PARA HALLAR EL PLANO TANGENTE NECESITAMOS:

$$z = g(s_0,t_0) + g_s(s_0,t_0)(s-s_0) + g_t(s_0,t_0)(t-t_0)$$

en nuestro caso:

$$\boxed{z = \overbrace{g(0,1)}^{A} + \overbrace{g_s(0,1)}^{B}\cdot s + \overbrace{g_t(0,1)}^{C}\cdot(t-1)}$$

A Ya lo tenemos: $g(0,1) = 10$

B sigo en la prox página

P11

Micaela González

Regla de la Cadena ← calculados en el inciso a) →

$$g_s(0,1) = \frac{dg}{ds} = \boxed{\frac{df}{dx}^{(1,-1)}} \cdot \frac{dx}{ds} + \boxed{\frac{df}{dy}^{(1,-1)}} \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$= \frac{dg}{ds} = \frac{2}{3} \cdot 2s + 2 \cdot (2(t+1)s - e^s)$$

$$= \frac{dg}{ds} = \frac{4}{3}s + 4s(t+1) - 2e^s$$

C.A.

$$\boxed{\frac{dy}{ds}} = 2(t+1)s - e^s$$

$$\frac{dg}{ds} = \frac{4}{3}s + 4st + 4s - 2e^s$$

$$\frac{dg}{ds} = s\left(\frac{4}{3} + 4t + 4\right) - 2e^s$$

b) $\boxed{\frac{dg}{ds}(0,1)} \underset{\text{evalúo en }(0,1)}{=} \cancel{0 \cdot \left(\frac{4}{3} + 4t + 4\right)} - 2e^0 = \boxed{-2}$ $\boxed{g_s}$

c) $g_t(0,1) = \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$= \frac{2}{3}\frac{dx}{dt} + 2 \cdot \frac{dy}{dt}$$

C.A.

$$\frac{dy}{dt} = [s^2t + s^2 - e^s]' = \boxed{s^2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2t + 2s^2 \underset{\text{evalúo en }(0,1)}{=} \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 0^2 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

c) $\boxed{g_t}$

sigo en la próx pag:

volvemos a nuestra ecuación del Plano Tangente (que le faltaban datos pero ya los conseguimos)

$$z = g(0,1) + g_s(0,1) \cdot s + g_t(0,1)(t-1)$$

$$\boxed{z = 10 + (-2)\, s + \frac{4}{3}(t-1)}$$ ✓

Plano tangente al gráfico de $g(0,1)$

Resuelto a partir de la Regla de la Cadena vista en clase.

Bien!

Felicitaciones!!

Muy buen parcial