

1	2	3	4	Calificación
20	6	20	24	70

A

TEMA 1

Probabilidades y Estadística (C)

Recuperatorio del segundo parcial - Segundo cuatrimestre 2022

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. Realizar cada ejercicio en hoja separada. Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.

APELLIDO Y NOMBRES: Nº DE LIBRETA:

mail: FIRMA:

Turno: Mañana: 11 a 14 hs Noche: 19 a 22 hs Nº de hojas entregadas (sin enunciado): 4

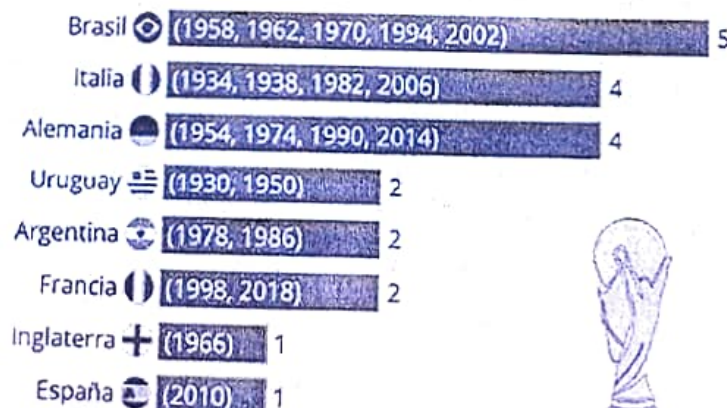
Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos y tener un ejercicio bien resuelto entre el 1, 3 y 4. Definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. Resolver usando al menos 4 decimales. Justifique claramente sus afirmaciones.

1. (25 puntos) El tiempo X en minutos que tarda Messi en ducharse cada vez que termina un partido es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 1/8$. El tiempo W en minutos que tarda Di María en ducharse cada vez que termina un partido es una variable aleatoria $U[5,10]$, independiente del tiempo que tarda Messi. Podemos asumir que los tiempos que demora cada jugador en ducharse en los diferentes días son independientes.
 - (a) (6 puntos) Después de jugar 35 partidos, aproximar la probabilidad de que Di María haya tardado en total más de 4 horas y 20 minutos en ducharse.
 - (b) (9 puntos) Después de jugar 35 partidos aproximar la probabilidad de que Messi haya tardado en promedio menos tiempo que Di María en ducharse.
 - (c) (10 puntos) Acotar la probabilidad de que el tiempo total que tardan en ducharse Di María y Messi en un partido elegido al azar esté entre $155/6$ y $31/6$ minutos.

2. (10 puntos) Considerar la cantidad de mundiales ganados por las selecciones campeonas entre 1930 y 2018 inclusive:

Las selecciones con más Mundiales de fútbol

Selecciones de fútbol campeonas de la Copa Mundial de la FIFA desde 1930 hasta 2018



- (a) (3 puntos) Hallar la mediana para la cantidad de mundiales ganados por las selecciones campeonas.
- (b) (7 puntos) Llamemos x_1, \dots, x_8 la cantidad de mundiales ganados por las selecciones campeonas (o sea los datos del ítem (a)) y sea

$$C(a) = \sum_{i=1}^8 (x_i - a)^2.$$

Hallar el valor de a para el cual se minimiza C . ¿Corresponde a alguna medida de centralidad o de dispersión conocida? (Entregar el valor de a redondeado en dos decimales)

3. (35 puntos) La distribución de Pareto es conocida en diferentes disciplinas porque permite (entre otros ejemplos) modelar la distribución de la riqueza ciertas poblaciones (pocos controlan grandes cantidades de riqueza y muchos adquieren poca), o bien la longitud de los trabajos asignados a los super ordenadores (unos pocos son grandes y muchos son pequeños), entre otras múltiples aplicaciones.

Consideremos una variable aleatoria X con distribución de Pareto de parámetro $\theta > 1$, cuya densidad está dada por

$$f(x) = \theta x^{-\theta-1} I_{[1,+\infty)}(x).$$

Definimos la variable aleatoria $Y = \ln(X)$.

Nota: Para facilitar algunos de los siguientes cálculos puede ser útil hallar la distribución de Y .

- (a) (8 puntos) Hallar el estimador de máxima verosimilitud para θ basado en una muestra X_1, \dots, X_n .
- (b) (8 puntos) Utilizar el método de los momentos para obtener otro estimador de θ basado en Y_1, \dots, Y_n .
- (c) (6 puntos) Elegir uno de los estimadores antes obtenidos y decidir si es consistente. Justificar adecuadamente.
- (d) (13 puntos) Supongamos que X modela la distribución de la riqueza en cierta región. En una encuesta realizada a 100 individuos se obtiene que el promedio logarítmico de riqueza es $1/150$. Hallar un intervalo de confianza para θ del 95%. ¿El intervalo hallado es exacto o asintótico?
4. (30 puntos) El secretario de una asociación profesional desea mostrar que menos de la mitad de sus socios apoya las medidas tomadas por el equipo económico del gobierno para enfrentar la crisis financiera. Para ello realiza un test de hipótesis seleccionando 500 socios al azar, de los cuales 220 apoyan las medidas económicas.
- (a) (13 puntos) Plantear las hipótesis del test. Dar el significado del parámetro utilizado. Definir las variables aleatorias utilizadas. Indicar el estadístico del test. Hallar la región de rechazo y tomar una decisión a nivel 5 %. En base a la evidencia observada y a nivel 5 %, ¿es posible decir que el secretario tiene razón? ¿El test desarrollado es exacto o asintótico?
- (b) (5 puntos) ¿Para qué niveles de significación podemos decir que el secretario tiene evidencia suficiente para sostener su afirmación?
- (c) (12 puntos) A partir del test planteado en el ítem (a), calcular la probabilidad de concluir que menos de la mitad de sus socios apoya las medidas tomadas por el equipo económico del gobierno para enfrentar la crisis si el 44 % de los socios apoyan las medidas económicas. ¿Es deseable que esta probabilidad sea cercana a 0 o cercana a 1? Justificar su respuesta.