SIMULACRO
1er PARCIAL

Ej 1) a) queremos hacer un esquema de trazas para poder graficar la superficie S: $z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2)$

Recordemos que $z = x^2 + y^2$ corresponde al "típico" paraboloide. Luego $z = -(x^2+y^2)$ será el paraboloide dado vuelta (apuntando con su copa hacia abajo).

Por lo tanto, $z = 4 - (x^2+y^2)$ debería ser el paraboloide invertido pero subido 4 unidades.

Verifiquemos nuestras "sospechas" graficando las trazas que pide el ejercicio.

Para trazas horizontales son aquellas en las que cortamos a la superficie con planos horizontales $z = c$ $(c \in \mathbb{R})$

$\underline{z=c}$: $\quad c = 4 - (x^2+y^2)$, equivale a:

$$x^2 + y^2 = 4 - c$$

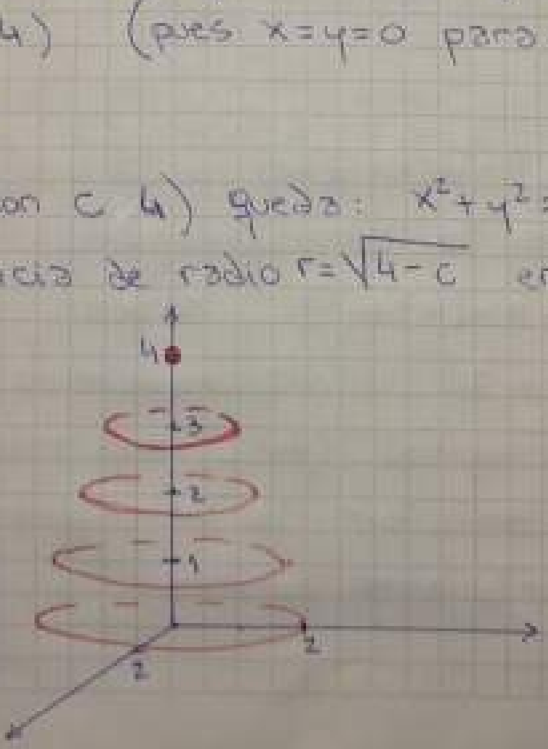
claramente si $c > 4$ eso no tiene sentido pues x^2+y^2 es mayor o igual a cero para todo (x,y) mientras que $4-c$ sería negativo.

El gráfico de S está por debajo del plano $z = 4$

Si $z = c$ (con $c = 4$) queda: $x^2 + y^2 = 0$: ¡sólo un punto!

El $(0,0,4)$ (pues $x = y = 0$ para que se cumpla $x^2+y^2=0$ pero $z = 4$

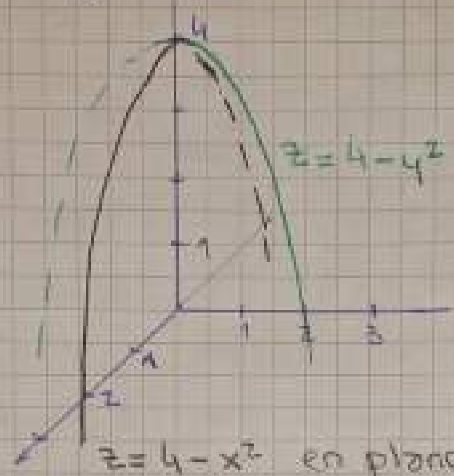
Si $z = c$ (con c 4) queda: $x^2 + y^2 = 4 - c$ que es una circunferencia de radio $r = \sqrt{4-c}$ en en plano $z = c$



Con respecto a las trazas verticales.

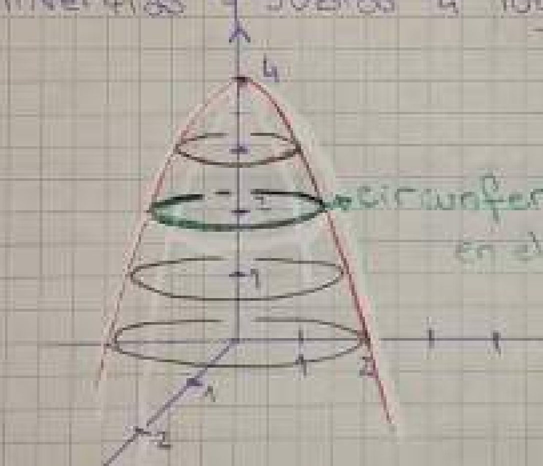
Si $x=0$ (plano yz) tenemos $z=4-y^2$, una parábola

Si $y=0$ (plano xz) tenemos $z=4-x^2$, parábola



Juntando todo obtenemos un gráfico de $S: z=4-(x^2+y^2)$

Paraboloide invertido y subido 4 lugares.



Ej 1) b) La curva de intersección de S con el plano horizontal $z=2$ es la circunferencia:

$$z=4-(x^2+y^2) \text{ , o sea:}$$

$$x^2+y^2=2$$: circunferencia de radio $\sqrt{2}$ en el plano horizontal (ver dibujo anterior)

El modo usual de describir la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ es usando coordenadas polares:

SIMULACRO
1er Parcial

Hoja 3

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Por lo cual podemos considerar $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (\underbrace{\sqrt{2}\cos t}_{x} ; \underbrace{\sqrt{2}\,\text{sen}\,t}_{y} ; \underbrace{2}_{z=2})$$

de modo que la imágen de la función r describe perfectamente la curva en cuestión (varias veces)
Si queremos describir la curva recorriéndola una sola vez podríamos tomar como dominio de $r(t)$ al intervalo $I = [0, 2\pi)$ o bien $I = [-\pi, \pi)$ ... o cualquier intervalo que me dé un giro completo a la circunferencia

Ej 1) c) Como $r(t) = (\sqrt{2}\cos t ; \sqrt{2}\,\text{sen}\,t , 2)$ describe la curva, el punto $P = (\sqrt{2}, 0, 2)$ está en dicha curva y corresponde a $t=0$, para calcular la recta tangente a dicha circunferencia lo haremos en forma paramétrica para lo cual necesitamos un vector dirección de la recta (es $\vec{v} = r'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$ y un punto de paso (claramente es P)

$r'(t) = (-\sqrt{2}\,\text{sen}\,t ; \sqrt{2}\cos t , 0)$
Luego $\vec{v} = r'(0) = (0, \sqrt{2}, 0)$

La recta será:

$$(x, y, z) = \lambda \underbrace{(0, \sqrt{2}, 0)}_{\vec{v}} + \underbrace{(\sqrt{2}, 0, 2)}_{P}$$

Ej 2) a) La fórmula de f está formada por producto, división y componiendo funciones continuas. La única restricción de dominio que podríamos llegar a tener es con respecto a los denominadores. Tanto en la expresión general de f como dentro del argumento del seno el denominador es x^2+y^2 que será distinto a cero si $(x,y) \neq (0,0)$

Luego, el Dominio de f es: $Dom f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Ej 2) b) Para que f sea continua en (0,0) debería existir f(0,0), también $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$, y además tendrían que coincidir dichos valores $(f(0,0) = \ell)$

La única manera de definir f en (0,0) de modo que sea continua es que exista ℓ (en cuyo caso definimos $f(0,0) = \ell$ y listo)

Analicemos, entonces, la existencia de

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Como $f(x,y) = \dfrac{y^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$, el numerador de f tiende a cero (pues $y^3 \to 0$ mientras que el seno está acotado por 1). El denominador de f también tiende a cero.

Estamos en presencia de un límite indeterminado del tipo "$\frac{0}{0}$" pero... abajo tenemos $\|(x,y)\|^2$ y en el numerador tenemos y^3 (que se acota por $\|(x,y)\|^3$) con lo cual todo da a pensar que el límite ℓ existe y vale cero. Probémoslo por definición:

Dado $\varepsilon>0$ busco $\delta>0$ de modo que si $\|(x,y)\|<\delta$ valga que $|f(x,y)-\underset{\ell}{0}|<\varepsilon$

Pero $|f(x,y)| = \dfrac{|y|^3 \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}{x^2+y^2} \overset{|\operatorname{sen}(\alpha)|\leq 1}{\leq}$

$$\leq \frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|y|^3}{\|(x,y)\|^2} \overset{|y|\leq\|(x,y)\|}{\leq} \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\| < \delta$$

Basta tomar $\delta=\varepsilon$ para asegurar que $|f(x,y)|<\varepsilon$

Luego ℓ existe y vale cero, si definimos $f(0,0)=0$ la función resultará continua en $(0,0)$.

Ej3) Claramente f es diferenciable en todo punto (x,y) distinto del origen pues es producto, composición y división de funciones diferenciables (con denominador no nulo). Faltaría analizar la diferenciabilidad de f en el $(0,0)$. Analicemos, en primer lugar, si existen las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$: debemos hacerlo por definición pues f es una función con dominio partido.

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\,0\,\operatorname{sen}(0)}{t^2} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Análoga (y simétricamente) vale $f_y(0,0)=0$

SIMULACRO
1er Parcial

Tenemos que analizar ahora si vale cero el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{f_x(0,0)}_{=0}\, x - \underbrace{f_y(0,0)}_{=0}\, y}{\|(x,y)\|}$$

o sea:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{xy\ \operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\ \operatorname{sen}(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Como vale que $|\operatorname{sen}(\alpha)| \leq |\alpha|$ para todo α entonces $|\operatorname{sen}(xy)| \leq |xy|$, además $|x| \leq \|(x,y)\|$, $|y| \leq \|(x,y)\|$ ... nos da la pauta que en el numerador tendremos $\|(x,y)\|^4$ ... mientras que en el denominador tenemos $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = \|(x,y)\|^3$.

Sospechamos fuertemente que el límite ese da cero (con lo cual f es diferenciable en (0,0))

Probémoslo por definición:

Dado $\varepsilon > 0$ busco $\delta > 0$ de modo que si $\|(x,y)\| < \delta$ entonces $\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} < \varepsilon$

$$\text{Pero } \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|x||y|\ |\operatorname{sen}(xy)|}{\|(x,y)\|^3} \overset{|\operatorname{sen}(\alpha)| \leq |\alpha|}{\leq} \frac{|x||y||x||y|}{\|(x,y)\|^3} \leq$$

$$\leq \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3} = \|(x,y)\| < \delta. \quad \text{Basta tomar } \delta = \varepsilon$$

Luego: f es diferenciable en (0,0) y, por lo tanto f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

SIMULACRO
1er Parcial

Hoja 7

Ej4) Consideremos $h(s,t) = f \circ g(s,t)$

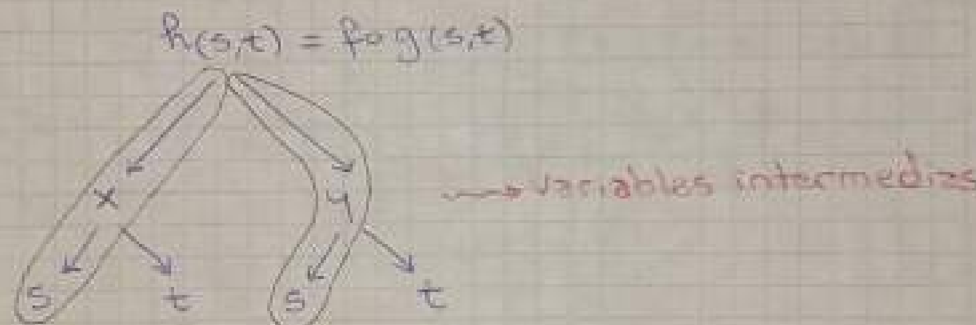
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

con $f(x,y) = x^2 - xy$

$g(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$

Ej4)a) Para calcular las derivadas parciales de h (h_s, h_t) tenemos que usar Regla de La Cadena (pues h es una función compuesta.

Usemos un diagrama de árbol como ayudamemoria:



$$\frac{\partial h}{\partial s}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(1,2)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(1,2)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(1,2)$$

Pero $g(1,2) = (1,1)$ (Dato del ejercicio)

$\frac{\partial x}{\partial s}(1,2) = 5$, $\frac{\partial y}{\partial s}(1,2) = -1$ (Datos del ejercicio)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(1,2)) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2x - y \Big|_{(1,1)} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(g(1,2)) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -x \Big|_{(1,1)} = -1$$

con lo cual : $\frac{\partial h}{\partial s}(1,2) = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1)$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(1,2) = 6$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(1,2)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(1,2)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(1,2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \cdot 3$$

$$= 2x-y\Big|_{(1,1)} \cdot 2 + (-x)\Big|_{(1,1)} \cdot 3$$

$$= 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(1,2) = -1$$

Ej 4) b) Como h es diferenciable por ser composición de dos funciones diferenciables (f y g) y el vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ tiene norma 1, entonces vale que:

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(1,2) = \nabla h(1,2) \cdot \vec{v}$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial s}(1,2) ; \frac{\partial h}{\partial t}(1,2)\right) \cdot \vec{v}$$

$$= (6,-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 6\,\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(1,2) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$