1	2	3	4	Calificación
25	29	20	23	97

Aprobado

Probabilidad y Estadística (C)

Segundo parcial - 24/11/2016

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

APELLIDO Y NOMBRES [redacted] Nº DE LIBRETA: [redacted]

mail: [redacted] @ [redacted] FIRMA: [redacted]

Turno: Tarde: 14 a 17 hs | Noche: 19 a 22 hs   Nº de hojas entregadas: 6

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (*25 puntos*) El horario de entrada de un empleado bancario es a las 10am. Llega diariamente con distribución uniforme entre las 9:45am y 10:15am. Cada día, se le descuentan Y pesos, siendo Y la tardanza en minutos.

a) (*5 p*) Probar que $E(Y) = 3.75$ y $V(Y) = 23.4375$

b) (*7 p*) Aproximar la probabilidad de que en 45 días se le descuenten más de \$200.

c) (*6 p*) ¿Cuántos días aproximadamente deberán pasar para que la suma acumulada de descuentos supere los \$350 con probabilidad mayor o igual a 0.95?

d) (*7 p*) Hallar un intervalo que acote al promedio de descuentos efectuados durante 45 días con probabilidad al menos 0.8.

2. (*30 puntos*) **(Ejercicio de la práctica)** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

a) (*8 p*) Probar que $T = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ.

b) (*7 p*) Calcular el estimador de θ basado en el primer momento.

c) (*15 p*) Analizar si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados, y consistentes.

3. (*20 puntos*) Se realizó un estudio para determinar el porcentaje de hogares que hacen "zapping" entre las 22 hs y las 23 hs. Para ello se encuestó a 50 hogares antes y después del horario, obteniendo que en 12 de ellos se hizo zapping.

a) (*12 p*) Hallar un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para la proporción p de hogares que hacen zapping entre las 22 hs y las 23 hs.

b) (*8 p*) ¿Cuántos hogares deberían encuestarse para que el intervalo de confianza para p, de nivel aproximado 0.95, tenga longitud menor a 0.1?

4. (*25 puntos*) Sea X la cantidad de aceite (en ml) que una máquina envasadora coloca en cada botella. Se supone que X tiene distribución normal. La máquina se ajusta para que la cantidad media de aceite envasado en cada botella sea de 300 ml. El dueño de la fábrica sospecha que una de las máquinas envasadoras está colocando más aceite por botella de lo que debería. Para decidir sobre esto se toma una muestra de 9 botellas envasadas por esta máquina.

a) (*13 p*) Plantear un test de nivel 0.05 para decidir si la máquina está envasando aceite de más. Indique claramente las variables aleatorias involucradas, los supuestos sobre las variables, las hipótesis, el estadístico del test, su distribución bajo H_0 y la región de rechazo.

b) (*5 p*) Si en la muestra de 9 botellas se obtuvo $\bar{x}_9 = 304$ y $s = 14.31$, ¿cuál es su conclusión a nivel 0.01?

c) (*7 p*) Acotar el p-valor para la muestra del ítem anterior. ¿A qué conclusión hubiese llegado a nivel 0.05?

HOJA Nº 1

FECHA

(1)

(a) X = "Horario que llega" (Tomo tiempo 0 como 10 am)

Y = "tardanza" = "pesos descontados"

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 0 \\ 0 & \text{si } X \leq 0 \end{cases} \qquad X \sim U_{[-15,15]}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{30} I_{[-15,15]}(x)$$

$$Y = X\, I_{[0,\infty)}(x)$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,\infty)}(x)\, x\, f_X(x)\, dx$$

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x\, I_{[-15,15]}(x)}{30}\, dx$$

$$= \int_0^{15} \frac{x\, dx}{30} = \left[\frac{x^2}{60}\right]_0^{15} = \boxed{3{,}75}$$

$$Y^2 = X^2 I_{[0,\infty)}(x) \qquad E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 I_{[0,\infty)}(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^2 I_{[-15,15]}(x)}{30}\, dx = \int_0^{15} \frac{x^2}{30}\, dx = \left[\frac{x^3}{90}\right]_0^{15} = 37{,}5$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y) = 37{,}5 - 3{,}75^2 = \boxed{23{,}4375}$$

NOTA

(b) $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ = "descuento en n días"

Siendo $Y_1, \dots, Y_n$ son iid y tienen la distribución de X

Me piden:

$$P\left(\sum_{i=1}^{45} Y_i > 200\right) = P\left(\frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{45} Y_i}^{\overline{Y}_{45}}}{45} > \frac{200}{45}\right) =$$

$$P\left(\underbrace{\frac{\overline{Y}_{45} - E(Y_1)}{\sqrt{V(Y_1)}} \cdot \sqrt{45}}_{\xrightarrow{D} Z \sim N(0,1) \text{ Por TCL}} > \frac{4,4 - E(Y_1)}{\sqrt{V(Y_1)}} \sqrt{n}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} E(Y_1) = 3,75 \\ V(Y_1) = 23,4375 \end{array}\right\}$ por (1)(a)

$$\simeq P\left(Z > \frac{4,4 - 3,75}{\sqrt{23,4375}} \sqrt{45}\right) = P(Z > 0,96225)$$

$n = 45 > 30$ es suficientemente grande para que el TCL dé una buena aprox.

$$= 1 - P(Z \leq 0,96225) = 1 - \Phi(0,96225) = 1 - 0,8315 = \boxed{0,1685}$$

(c) Me piden n tq

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i > 350\right) \geq 0,95$$

$$\|$$

$$P\left(\underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{Y}_n - 3,75}{\sqrt{23,4375}}}_{\xrightarrow{D} Z \sim N(0,1) \text{ por TCL}} > \sqrt{n}\,\frac{\frac{350}{n} - 3,75}{\sqrt{23,4375}}\right)$$

HOJA N° 2

FECHA

Si $n>30$:

$$\simeq 1-\phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\frac{350}{n}-3,75}{\sqrt{23,4375}}\right)\geq 0,95$$

$$\iff \phi\left(\sqrt{n}\,\frac{\frac{350}{n}-3,75}{\sqrt{23,4375}}\right)\leq 0,05$$

$$\iff \sqrt{n}\,\frac{\frac{350}{n}-3,75}{\sqrt{23,4375}} \leq \phi^{-1}(0,05) = -1,64$$

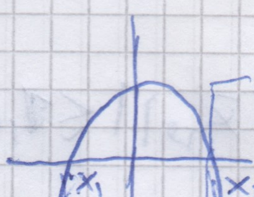
$$\iff \sqrt{n}\left(\frac{350}{n}-3,75\right) \leq -7,9396$$

$$\iff \frac{350}{\sqrt{n}} - 3,75\sqrt{n} + 7,9396 \leq 0$$

$$\iff 350 - 3,75\,n + 7,9396\sqrt{n} \leq 0$$

~~Tomo~~ ~~x=n~~ Tomo $x=\sqrt{n}$

$$-3,75x^2+7,9396x+350\leq 0$$



Raíces: $x_{1,2} = \dfrac{-7,9396 \pm \sqrt{7,9396^2-4.(-3,75).350}}{2.(-3,75)}$

$x_1 = -8,6601$

$x_2 = 10,77858 \leq x = \sqrt{n} \iff n \geq 116,1514428$

$\underset{n\in\mathbb{N}}{\iff} \boxed{n\geq 117}$

Deben pasar al menos 117 días.

(d) Queremos a,b tq:

$$P(2 \leq \overline{Y}_{45} \leq 6) \geq 0,8$$

~~Sabemos desde~~

Por Chebyshev, se que $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\overline{Y}_{45} - E(\overline{Y}_{45})| > \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{Y}_{45})}{\varepsilon^2}$$

Luego:

$$P(|\overline{Y}_{45} - E(\overline{Y}_{45})| \leq \varepsilon) =$$

$$1 - P(|\overline{Y}_{45} - E(\overline{Y}_{45})| > \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\overline{Y}_{45})}{\varepsilon^2}$$

$$\geq 0,8 \iff \frac{V(\overline{Y}_{45})}{\varepsilon^2} \leq 0,2 \iff \varepsilon^2 \geq \frac{V(\overline{Y}_{45})}{0,2} = \frac{0,52083}{0,2} = 2,60415$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\iff} \varepsilon \geq \sqrt{2,60415} = 1,61373$$

Entonces, si tomo $\varepsilon = 1,61373$:

$$P(|\overline{Y}_{45} - E(\overline{Y}_{45})| \leq 1,61373) \geq 0,8$$

$$\|$$

$$P(-1,61373 \leq \overline{Y}_{45} - E(\overline{Y}_{45}) \leq 1,61373)$$

$$= P(-1,61373 + E(\overline{Y}_{45}) \leq \overline{Y}_{45} \leq 1,61373 + E(\overline{Y}_{45}))$$

$$= P(2,1127 \leq \overline{Y}_{45} \leq 5,3873) \geq 0,8$$

$\therefore$ ~~El intervalo de que~~ $P(\overline{Y}_{45} \in \boxed{[2,1127 ; 5,3873]}) \geq 0,8$

$$E(\overline{Y}_{45}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{45} Y_i}{45}\right) \overset{\text{linealidad}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{45} E(Y_i)}{45}$$

$$\underset{id}{=} \frac{\sum_{i=1}^{45} E(Y_1)}{45} = \frac{45}{45} E(Y_1) = 3,75$$

$$V(\overline{Y}_{45}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{45} Y_i}{45}\right)$$

$$= \frac{V\left(\sum_{i=1}^{45} Y_i\right)}{45^2} \underset{\text{indep.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{45} V(Y_i)}{2025}$$

$$\underset{id}{=} \frac{\sum_{i=1}^{45} V(Y_1)}{2025} = \frac{45 \times 23,4375}{2025}$$

$$= 0,52083$$

HOJA N° 3

FECHA

(2)

(a) Busco θ que maximice la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x_i)$$

por independencia
(densidad conjunta = prod. de densidades)

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{\theta}}{\prod_{i=1}^{n} e^{-x_i}} \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\infty)}(x_i) = \frac{e^{n\theta}}{e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\infty)}(x_i)}$$

$= 1 \iff x_i \geq \theta \;\; \forall i = 1, \dots, n$

$\iff \theta \leq \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i$

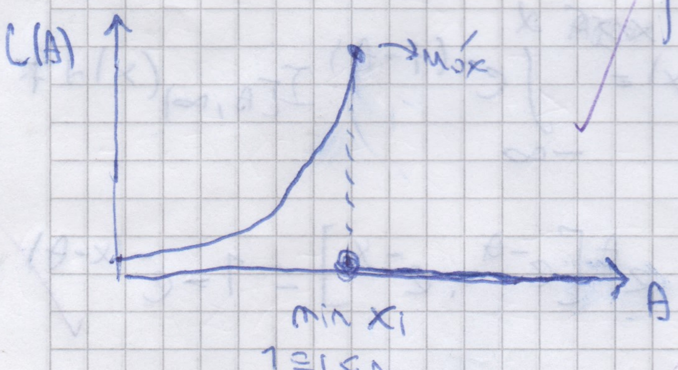
$= 0 \iff \exists\, i = 1 \dots n \text{ tq } x_i < \theta$

$\iff \theta > \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{n\theta}}{e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}} & \text{si } \theta \leq \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$e^{n\theta} \to$ creciente

fijo > 0



$\therefore$ $L(\theta)$ se maximiza en $\min\limits_{1\leq i\leq n} x_i$

y $\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i}$

(b) primer momento $= E(X_1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x)\, dx$

$$e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = e^{\theta} \cdot (\mathrm{I})$$

$$\textcircled{I} = \int_{\theta}^{\infty} x e^{-x}\,dx = -\cancel{x}e^{-x}\Big|_{\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} e^{-x}\,dx = \cancel{-\theta}\,e^{-\theta} + \left(-e^{-x}\right)\Big|_{\theta}^{\infty}$$

$u = x \quad du = 1$

$dv = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$

$$= \theta e^{-\theta} + e^{-\theta} = e^{-\theta}(\cancel{\theta}+\cancel{\theta})$$

Luego: $E(X) = e^{\theta} \cdot e^{-\theta}(1+\theta) = 1+\theta$

Usando método de momentos $\overline{X} = 1+\theta \Rightarrow \theta = \overline{X} - 1$

$$\therefore \boxed{\hat{\theta}_{MO} = \overline{X} - 1}$$

ⓒ Busco la distribución de $Y = \hat{\theta}_{MV} = \min X_i$

$$F_Y(y) = P(\min X_i \leq y) = 1 - P(\min X_i > y) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i > y\}\right)$$

$$\underset{\text{indep}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) \underset{\text{id}}{=} 1 - P(X_1 > y)^n = 1 - (1 - P(X_i \leq y))^n =$$

$$1 - (1 - F_X(y))^n \quad \text{Hallo } F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x)\,dt$$

$$\underset{x \geq \theta}{=} e^{\theta}\int_{\theta}^{x} e^{-t}\,dt = e^{\theta}\left[-e^{-t}\right]_{\theta}^{x} = e^{\theta}\left[e^{-\theta} - e^{-x}\right] = 1 - e^{-(x-\theta)}$$

0 si $x < \theta$

$$\frac{dF_Y(y)}{d\theta} = + n(1 - F_X(y))^{n-1} f_X(y) = n\left(1 - 1 + e^{-(x-\theta)}\right)^{n-1} e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x)$$

$$= n e^{-(y-\theta)(n-1)} e^{-(y-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(y) = n e^{-n(y-\theta)} \underline{I_{[\theta,+\infty)}(y)}$$

$$E(\hat{\theta}_{mv}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, y \, dy = \int_{\theta}^{\infty} n y \, e^{-n(y-\theta)} dy =$$

$$= n e^{n\theta} \int_{\theta}^{\infty} y e^{-ny} dy = n e^{n\theta} \cdot \text{II}$$

$$\text{II} = \int_{\theta}^{\infty} y e^{-ny} dy = \left. -\frac{y e^{-ny}}{n} \right|_{\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n} dy = \frac{\theta e^{-n\theta}}{n} + \left(-\frac{e^{-ny}}{n^2} \right)_{\theta}^{\infty}$$

$u = y \quad du = 1$

$dv = e^{-ny} \quad v = -\frac{e^{-ny}}{n}$

$$= \frac{\theta e^{-n\theta}}{n} + \frac{e^{-n\theta}}{n^2} = \frac{(\theta + \frac{1}{n})}{n e^{n\theta}}$$

$$E(\hat{\theta}_{mv}) = n e^{n\theta} \frac{(\theta + \frac{1}{n})}{n e^{n\theta}} = \theta + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta$$

$$\theta + \frac{1}{n} \neq \theta$$

$\therefore \hat{\theta}_{mv}$ es sesgado pero asintóticamente insesgado

$$E(\hat{\theta}_{mv}^2) = \int_{\theta}^{\infty} n y^2 e^{-n(y-\theta)} dy = n e^{n\theta} \int_{\theta}^{\infty} y^2 e^{-ny} dy = n e^{n\theta} \cdot \text{III}$$

$$\text{III} = \int_{\theta}^{\infty} y^2 e^{-ny} dy = \left. -\frac{y^2 e^{-ny}}{n} \right|_{\theta}^{\infty} + \frac{2}{n} \int_{\theta}^{\infty} y e^{-ny} dy$$

$u = y^2 \quad du = 2y$

$dv = e^{-ny} \quad v = -\frac{e^{-ny}}{n}$

$$= \frac{\theta^2 e^{-n\theta}}{n} + \frac{2}{n} \cdot \text{II} = \frac{\theta^2 e^{-n\theta}}{n} + \frac{2}{n} \left(\frac{\theta + \frac{1}{n}}{n e^{n\theta}} \right)$$

$$= \left(\theta^2 + \frac{2(\theta + \frac{1}{n})}{n} \right) \frac{1}{n e^{n\theta}}$$

$$E(\hat{\theta}_{mv}^2) = \theta^2 + \frac{2(\theta + 1/n)}{n} = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2}$$

$V(\hat{\theta}_{MV}) = E(\hat{\theta}_{MV}^2) - E(\hat{\theta}_{MV})^2 = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} - \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2$

$= \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} - \theta^2 - \frac{2\theta}{n} - \frac{1}{n^2} = -\frac{4\theta}{n} - \frac{3}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\left.\begin{array}{l} E(\hat{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta \\ V(\hat{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\theta}_{MV}$ es consistente

— o —

$E(\hat{\theta}_{MO}) = E(\bar{X} - 1) \underset{\text{linealidad}}{=} E(\bar{X}) - E(1) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) - 1$

$= \underset{\text{linealidad}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} E(x_i)}{n}} - 1 \underset{\text{id}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} E(x_1)}{n} - 1 = \frac{n E(x_1)}{n} - 1 = E(x_1) - 1$

$= \theta + 1 - 1 = \theta$ $\therefore$ $\hat{\theta}_{MO}$ es insesgado y por lo tanto asintóticamente insesgado

Por LGN: $\bar{X} \xrightarrow{P} E(x_1) = \theta + 1$ — Aplico la función continua $g(x) = x - 1$

$\bar{X} - 1 \xrightarrow{P} \theta + 1 - 1$

$\hat{\theta}_{MO} \xrightarrow{P} \theta$ Es decir $\hat{\theta}_{MO}$ es consistente

Falta verificar hipótesis $V(x) < \infty$ ¡genial!

$E(x_1^2) = \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{-(x-\theta)}\,dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = e^{\theta} * \text{IV}$

$\text{IV} \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x}\Big|_{\theta}^{\infty} + 2\int_{\theta}^{\infty} x e^{-x}\,dx = \theta^2 e^{-\theta} + 2\,\text{I} = \theta^2 e^{-\theta} + 2e^{-\theta}(\theta+1)$

$= e^{-\theta}(\theta^2 + 2\theta + 1)$ $\therefore$ $E(x_1^2) = \theta^2 + 2\theta + 2$

$u = x^2 \quad du = 2x$

$dv = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$

$V(x) = E(x_1^2) - E(x)^2 = \theta^2 + 2\theta + 2 - (\theta+1)^2$

$= \theta^2 + 2\theta + 2 - \theta^2 - 2\theta - 1 = 1 < \infty$

NOTA

HOJA Nº 5

FECHA

(2)

X_i = "hogar i hizo zapping" $= \begin{cases} 1 & \text{si hizo zapping} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria con distribución Bernoulli(p)

(Asumo X_i independientes)

$\mu = E(X_i) = p \quad V(X_i) = p(1-p) = \sigma^2$

$$T' = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ por TCL}$$

$$\overline{X} \xrightarrow{P} E(X_i) = p \text{ por LGN}$$

$$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \xrightarrow{P} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{p(1-p)}} = 1 \quad \text{Aplico } g(x) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ función continua}$$

(constante)

Por Slutsky, $T = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}\, T' = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \xrightarrow{D} N(0,1) * 1$

Busco z t.q.

$$P(-z \leq T \leq z) \cong 0{,}95$$

$$\Phi(z) - \Phi(-z) = \Phi(z) - (1-\Phi(z)) = 2\Phi(z) - 1 = 0{,}95$$

$$\Longleftrightarrow \Phi(z) = 0{,}975 \Longleftrightarrow z = \Phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}96$$

$$\therefore -1{,}96 \leq T \leq 1{,}96 \Longleftrightarrow -1{,}96 \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \leq 1{,}96$$

$$\Longleftrightarrow -1{,}96\,\frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} - \overline{X} \leq -p \leq 1{,}96\,\frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} - \overline{X}$$

NOTA

$$\iff \bar{X} - \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \times 1,96 \le p \le \bar{X} + \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \times 1,96$$

$$P\left(p \in \left[\bar{x} - \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} 1,96 ; \bar{x} + \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \times 1,96\right]\right) \simeq 0,95$$

$$\therefore \quad ICA_{0,95}(p) = \left[\bar{x} - \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \times 1,96 ; \bar{x} + \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \times 1,96\right]$$

Datos:

$$n = 50 \quad \sum x_i = 12 \Rightarrow \bar{x} = \frac{12}{50} = 0,24$$

$$ICA_{0,95}(p) = \left[0,24 - \frac{\sqrt{0,24(1-0,24)}}{\sqrt{50}} \times 1,96 ; 0,24 + \frac{\sqrt{0,24(1-0,24)}}{\sqrt{50}} \times 1,96\right]$$

$$= \boxed{[0,1216 ; 0,3584]}$$

(b)

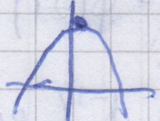
$$L = \bar{X} + \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} 1,96 - \left(\bar{X} - \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} 1,96\right)$$

$$= 3,92 \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}{\sqrt{n}} \overset{*}{\le} 3,92 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} = \frac{1,96}{\sqrt{n}} \le 0,1 \iff$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{1,96}{0,1} \iff \boxed{n \ge 384,16}$$ Debe encuestar al menos 385 lugares

$$\underset{n \in \mathbb{Z}}{\iff} \boxed{n \ge 385}$$

(*) $\bar{x}(1-\bar{x}) = \bar{x}^2 - \bar{x}$



derivo: $2\bar{x} - 1$ y busco PC: $2\bar{x} - 1 = 0 \iff \bar{x} = \frac{1}{2}$ (máximo)

Luego $\bar{x}(1-\bar{x}) \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ y al aplicar una función creciente se tiene la desigualdad

HOJA Nº 6

FECHA

(4) X_i = "Cantidad de aceite envasado (en ml) en botella i"

(a) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu_0 = 300$

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$

Supongo que la cantidad de cada una es independiente

$P(\text{Error Tipo I}) = P_{H_0}(\text{Rechazar } H_0) = P_{H_0}(\text{Decidir que envasa de más})$

$= 0{,}01$

¿quiénes son las X_i's y qué supuestos satisfacen?

estadístico: $T = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}$

Bajo $H_0 (\mu = \mu_0)$, $T \sim t_{n-1}$ (t_8 con $n = 9$)

Busco c tq $P_{H_0}(T > c) = 0{,}01$

Por tabla $c = t_{8,\,0{,}01} = 2{,}8965$

Región de Rechazo: $T > 2{,}8965$

(b) $\overline{x}_9 = 304$ $s = 14{,}31$

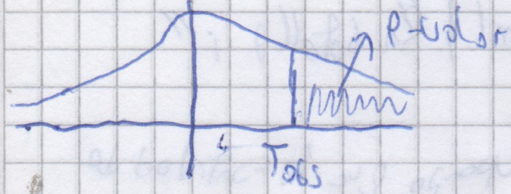
$\Rightarrow T_{obs} = \sqrt{9}\,\dfrac{304 - 300}{14{,}31} = 0{,}838574 < 2{,}8965$

$\neg (T_{obs} > 2{,}8965)$

∴ No hay evidencia estadística para decir que la máquina envasa de más / NO RECHAZO H_0

NOTA

(c) p-valor es el mínimo nivel tal que ~~[illegible]~~, dada la muestra, rechazo H_0



p-valor $= P_{H_0}(T > T_{obs}) = P_{H_0}(T > 0{,}8385449)$

$$P_{H_0}(T > 1{,}3988) \le P_{H_0}(T > 0{,}838074) \le P_{H_0}(T > 0{,}7064)$$

(tabla) $\boxed{0{,}1 \le p\text{-valor} \le 0{,}25}$

Ya que $0{,}05 \le 0{,}1 \le$ p-valor, y el p-valor es el mínimo nivel con el cual rechazo, entonces a nivel $0{,}05$ NO RECHAZO.