[redacted]

1	2	3	4	5	Calificación
B	B	B-	B=	B	A

Apellido y Nombre: [redacted]
Turno: ☐ Mañana ☒ Tarde ☐ Noche

No. de libreta: [redacted]
Carrera: [redacted]

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer parcial - 19/10/2018

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 30\}$. En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A\mathcal{R}B \text{ si y sólo si } 2 \notin A \cap B^c.$$

   a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimética y/o transitiva.

   b) ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen $\{2, 6\}\mathcal{R}B$?

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión definida por

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1 + 3^{n+1}}{2} + \sum_{i=0}^{n} a_i, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0.$$

   Probar que $a_n \leq 3^n + 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, ..., 8\} \to \{1, 2, 3, ..., 12\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

   a) f es inyectiva,

   b) $f(1) \leq 6$,

   c) $f(5) + f(6) = 10$.

4. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = -8 \text{ y } a_{n+2} = 4^{2n+1}a_{n+1} + 15^{n+1}a_n + 7n - 7 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   Probar que $a_n \equiv n \pmod 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$

5. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que 23 divide a a y $(a : b) = 1$. Probar que $(3a - b : 5a + 6b) = 1$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

[redacted]

HOJA N° 1

FECHA

1) Sea $X = \{1, \ldots, 30\}$ se define en $P(X)$ la relación $\mathcal{R}$ tq

$A \mathcal{R} B \iff 2 \notin A - B \quad (ó\ 2 \notin A \cap B^c)$

a) • Reflexiva: $A \mathcal{R} A \iff 2 \notin A - A$?

pero se que $A - A = \emptyset \quad \therefore 2 \notin \emptyset$ es cierto $\therefore$ SI es REFLEXIVA ✓

• SIMETRICA: si $A \mathcal{R} B \Rightarrow B \mathcal{R} A$?

o sea si $2 \notin A - B \Rightarrow 2 \notin B - A$

lo refuto con un contraejemplo: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

$A - B = \{1\} \Rightarrow 2 \notin A - B$ pero $B - A = \{2\}$ y $2 \in B - A$ ABS!

$\therefore$ NO es SIMETRICA ✓

• ANTISIMETRICA: si $A \mathcal{R} B$ y $B \mathcal{R} A \Rightarrow A = B$?

o sea si $2 \notin A - B$ y $2 \notin B - A \Rightarrow A = B$

lo refuto con un contraejemplo: $A = \{3\}$, $B = \{4\}$

$A - B = \{3\} \Rightarrow 2 \notin A - B$ y $B - A = \{4\} \Rightarrow 2 \notin B - A$

sin embargo $A \neq B \quad \therefore$ NO es ANTISIMETRICA ✓

• TRANSITIVA: si $A \mathcal{R} B$ y $B \mathcal{R} C \Rightarrow A \mathcal{R} C$?

o sea si $2 \notin A - B$ y $2 \notin B - C \Rightarrow 2 \notin A - C$

Voy a probarlo mediante una tabla de relaciones

donde "X" significa que bajo tal condición la relación $\mathcal{R}$ no se cumple

y "$\checkmark$" significa que si cumple la ~~condición~~ relación R

$ARB \to 2 \in A$ y $2 \in B$ ✓ $\to 2 \in B$ y $2 \in C$ ✓ $\to 2 \in A$ y $2 \in C$ ✓

$2 \in A$ y $2 \notin B$ X $\quad 2 \in B$ y $2 \notin C$ X

$2 \notin A$ y $2 \in B$ ✓ $\to 2 \in B$ y $2 \in C$ ✓ $\to 2 \notin A$ y $2 \in C$ ✓

$2 \notin A$ y $2 \notin B$ ✓ $\quad 2 \in B$ y $2 \notin C$ X

$2 \notin B$ y $2 \in C$ ✓ $\to 2 \notin A$ y $2 \in C$ ✓

$2 \notin B$ y $2 \notin C$ ✓ $\to 2 \notin A$ y $2 \notin C$ ✓

Con esto demostré que en todos los casos donde vale $A R B$ y $B R C$, implican que También vale $A R C$

∴ SI es TRANSITIVA ✓

b) ¿# cjtos $B \in P(X)$ satisfacen $\{2,6\} R B$

para que la relación funcione (y se puede ver en mi tabla de rel. de 1a))

$\Rightarrow 2 \in B$, así $\{2,6\} R \{2\} \iff (\{2,6\} - \{2\} = \{6\})\ 2 \notin \{6\}$

Ahora me falta ver que para con el resto de nros de X

se puede ver a simple vista que $\{2,6\} R (\{2\} \cup K)$

con $K \subseteq X$ y con $2 \notin K$ funciona ya que

en una relación $A - B$ siempre se resta la intersección de A y B

y justamente es lo que necesito para sacar el "2"

pero lo que sea que quede o no quede no rompe la relación

∴ K puede contener a cualquiera de estos nros $\{1,3,4,5,6,\ldots,30\}$

(incluido el 6 ya que $\{2,6\} R \{2,6\} \iff 2 \notin \{2,6\} - \{2,6\} = \emptyset$)

ojo que esto es solo un caso que contiene el 6

entonces como el cjto $\{1,3,4,5,6,\ldots,30\}$ tiene 29 elementos (donde cada elemento puede estar o no)

∴ hay $\boxed{2^{29}}$ conjuntos $B \in P(X)$ que satisfacen $\{2,6\} R B$ ✓

HOJA N° 2

FECHA

3) Cuantas funciones $f: \{1, \dots, 8\} \to \{1, \dots, 12\}$ satisfacen estas 3 condiciones

a) f es inyectiva: el total funciones inyectivas de f es $\frac{12!}{(12-8)!} = \frac{12!}{4!}$ ✓

b) $f(1) \leq 6$ es decir el nro 1 solo tiene 6 valores para elegir y los demas 7 nros tienen una chance menos de elegir a los 12 de la imagen $\Rightarrow$ (considerando inyectividad)

$$6 \cdot \frac{11!}{(11-7)!} = \underbrace{6}_{\text{seis posib del 1}} \cdot \underbrace{\frac{11!}{4!}}_{\text{los 7 restantes van a pasar a alguno de los 11 restantes de la imagen}}$$ ✓

c) $f(5) + f(6) = 10$:

ⓒ $f(5) + f(6) = 10$

debo analizar que nros entre el 1 y el 12 sumados (sin repetirse) dan $=10$

posibles resultados

$f(5)$	$f(6)$
9	1
8	2
7	3
6	4
4	6
3	7
2	8
1	9

por tabla puedo ver que solo tengo 8 posibles combinaciones

Pero tambien estoy teniendo un problema:

Como tengo que hacer cumplir que $f(1) \leq 6$

y acá tengo nros $\leq 6 \Rightarrow$ entraría en conflicto el conteo.

Primero analizo los problemas: el problema es que al menos uno de los dos es ≤ 6 pero en el caso de $f(5) = 6$ ó 4 tengo un doble problema ya que deja menos oportunidad para que se cumpla $f(1) \leq 6$. Lo mejor solución es separar en casos:

• Caso "solo un $f \leq 6$": ~~si sola tenga un nro~~

~~Esto~~ significa que $f(5)$ y $f(6)$ tienen 2 posibles combinaciones y solo 1 de ellos es ≤ 6. Y además $f(1) \leq 6$ para cumplirlo, ~~solo~~

$f(1)$ solo tiene 5 posibles elecciones $\Rightarrow \underbrace{5}_{f(1)} \cdot \underbrace{2}_{f(5)\ f(6)} \cdot \underbrace{\frac{(12-3)!}{((12-3)-(8-3))!}}_{\text{tengo que reordenar los demas nros sin los 3 que ya conte}} \cdot 3$ elegir el de los de $f(5)$ o $f(6)$ que es ≤ 6

$$= \boxed{5 \cdot 2 \cdot \frac{9!}{4!}}$$

• Caso "los dos $f \leq 6$": basicamente uso el mismo planteo que antes salvo de que $f(1) \leq 6$ solo dejo a 1 con 4 posibilidades $\Rightarrow$

$$= \boxed{4 \cdot 2 \cdot \frac{9!}{4!}}$$

Finalmente como son casos independientes uno con el otro puedo sumarlos

Rta: hay $\boxed{2 \cdot \frac{9!}{4!} \left(\overset{15}{5} + 4\right)}$ funciones tales que se cumplan a, b y c

④ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $a_1 = 6$, $a_2 = -8$, $a_{n+2} = 4^{2n+1} \cdot a_{n+1} + 15^{n+1} a_n + 7n - 7$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Probar $\underbrace{\boxed{a_n \equiv n \pmod 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}}}_{p(n)}$

Por inducción

• CB: • $a_1 = 6 \equiv 1 \ (5)$ ✓ es cierto

• $a_2 = -8 \equiv 2 \ (5)$ ✓ es cierto

• PI: $\boxed{p(n) \Rightarrow p(n+1)}$ No es la inducción que en el enfoque siguiente planteas como hipotesis inductiva

HI: $\boxed{a_n \equiv n \ (5)}$ y $\boxed{a_{n+1} \equiv n+1 \ (5)}$

qPq: $\boxed{a_{n+2} \equiv n+2 \ (5)}$

x def: $a_{n+2} = 4^{2n+1} \cdot a_{n+1} + 15^{n+1} \cdot a_n + 7n - 7$

$\overset{HI}{\equiv} 4^{2n+1} \cdot (n+1) + \underset{\equiv 0}{15^{n+1}} \cdot n + 7n - 7 \ (5)$

[CA: $4^{2n+1} = (4^2)^n \cdot 4 = 16^n \cdot 4 \equiv 1^n \cdot 4 \equiv 4 \ (5)$]

$a_{n+2} \overset{CA}{\equiv} 4(n+1) + 0 \cdot n + 7n - 7 \quad (5)$

$\equiv 4n + 4 + 7n - 7 \quad (5)$

$\equiv 11n - 3 \equiv 1n + 2 \equiv n + 2 \ (5)$

$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} \equiv n+2 \ (5)}$ ∴ como vale $p(n+1)$ ✓

✓ x principio de inducción $p(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$

HOJA N° 5

FECHA

(2) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ def: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+3^{n+1}}{2} + \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Probar $\underbrace{\boxed{a_n \leq 3^n + 2^n}}_{p(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

- CB: $p(0)$: $a_0 = 2 \Rightarrow 2 \leq 3^1 + 2^1 \Leftrightarrow 2 \leq 5$ ✓ es cierto $\Rightarrow p(0)$ vale
- PI: por Inducción global: ~~vale $p(n) \Rightarrow$ vale $p(n+1)$~~

$\forall k,\ 0 \leq k \leq n$ si vale $p(k) \Rightarrow$ vale $p(n+1)$

Entonces supongo que vale $p(k)$ $\underbrace{\boxed{a_k \leq 3^k + 2^k}}_{HI} \ \forall k \leq n$

quiero probar que: $\boxed{a_{n+1} \leq 3^{n+1} + 2^{n+1}}$ qpq

$$\times \text{ def } a_{n+1} = \frac{1+3^{n+1}}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{HI}{\leq} \frac{1+3^{n+1}}{2} + \sum_{k=0}^{n}(3^k + 2^k)$$

$$\leq \frac{1+3^{n+1}}{2} + \sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} 2^k \leq (*)$$

$$CA: \left[\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{3^{n+1}-1}{2} \ \middle|\ \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \right]$$ por ser telescópicas

primeros terminos de serie geométrica

$$(*) \leq \frac{1+3^{n+1}}{2} + \frac{3^{n+1}-1}{2} + 2^{n+1} - 1 \overset{qpq}{\leq} 3^{n+1} + 2^{n+1} \Leftrightarrow$$

(me basta probar) $$\frac{1+3^{n+1}}{2} + \frac{3^{n+1}-1}{2} \leq 3^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+3^{n+1}+3^{n+1}-1}{2} \leq 3^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2} \leq 3^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{n+1} \leq 3^{n+1}$$ es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ como vale $p(n+1) \Rightarrow$ ~~[illegible]~~
por Principio de Inducción Global vale $p(n)$

5) Sean $a,b \in \mathbb{Z}$ tq $23 | a$ y $(a:b)=1$

Probar que $(3a-b : 5a+6b)=1$

llamo $d=(3a-b : 5a+6b)$ y por TEO se que

$$\begin{cases} d \mid 3a-b \\ d \mid 5a+6b \end{cases} \underset{\times 3}{\overset{\times 5}{\Longrightarrow}} \begin{matrix} d \mid 15a-5b \\ d \mid 15a+18b \end{matrix} \overset{\text{resto}}{\Longrightarrow} d \mid 18b-(-5b) \Rightarrow d \mid 23b$$

$$\begin{cases} d \mid 3a-b \\ d \mid 5a+6b \end{cases} \overset{\times 6}{\Longrightarrow} \begin{matrix} d \mid 18a-6b \\ d \mid 5a+6b \end{matrix} \overset{\text{sumo}}{\Longrightarrow} d \mid 18a+5a \Rightarrow d \mid 23a$$

Como $\begin{matrix} d \mid 23b \\ d \mid 23a \end{matrix} \overset{\text{TEO}}{\Longrightarrow} d \mid (23a : 23b) \overset{\text{PROP}}{\Longrightarrow} d \mid 23\,(a:b)^{=1} \Rightarrow \boxed{d \mid 23}$

o sea los posibles valores de $d = 1$ ó 23 y ningún otro

La consigna me pide probar que $d=1 \Rightarrow$

voy a refutar $d=23$:

Sup $d=23 \overset{\text{TEO}}{\Longrightarrow} \begin{matrix} 23 \mid 3a-b \\ 23 \mid 5a+6b \end{matrix}$

$23 \mid 3a-b \iff 3a-b \equiv 0 \ (23) \iff b \equiv 3a \ (23)$

pero se que $23 \mid a \iff a \equiv 0 \ (23)$ (x consigna)

Entonces $b \equiv 3a \ (23) \iff b \equiv 0 \ (23) \iff 23 \mid b$

pero si $\begin{cases} 23 \mid a \\ 23 \mid b \end{cases} \overset{\text{TEO}}{\Longrightarrow} 23 \mid \underbrace{(a:b) = 1}_{\text{x consigna}} \iff 23 \mid 1$ ABS!

Como el absurdo vino de suponer $d=23$

significa que $d \neq 23$ y por descarte (ya que $d = 1$ ó 23)

Rta: $\boxed{d=1} = (3a-b : 5a+6b)$ si $23 \mid a$ y $(a:b)=1$