¡Excelente!

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B	10 (DIEZ)

APELLIDO Y NOMBRE: Kiszkurno Nicolás .... NO. DE LIBRETA: ....

TURNO: ☐ A-K 11 a 14 hs ☒ L-Z 11 a 14 hs ☐ 16 a 19 hs ☐ 17 a 20 hs

CARRERA: Lic. en Ciencias de Datos (LCD) .... 6 hojas ......

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer parcial - 21/10/2023

Ejercicio 1. Consideremos el conjunto $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Sean $\mathcal{F} = \{f : X \to X \,/\, f \text{ es función}\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f\,\mathcal{R}\,g \iff f(n) \leq g(n), \text{ para todo } n \in \{0,1,2,3,4,5\}.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.

b) Sea $h \in \mathcal{F}$ la función definida como:

$$h(n) = r_3(n), \text{ para todo } n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Es decir, h es la función que a cada n le asigna su resto en la división por 3.
Calcular el cardinal del conjunto

$$\{f \in \mathcal{F} \,/\, 8 \in \mathrm{Im}(f) \text{ y } f\,\mathcal{R}\,h\}.$$

Ejercicio 2. Probar que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{10k-5}{2k} > n\,3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Sea $n \in \mathbb{N}$.

a) Probar que $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \iff n \equiv 1 \pmod 5$.

b) Calcular $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Determinar todos los enteros positivos $n \leq 30000$ tales que $(n : 5184) = 1728$ y que tienen exactamente 56 divisores positivos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles, y sea claro al escribir.

2) Probar que $\prod_{i=1}^{n} \frac{10i-5}{2i} > n\,3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Con $n=1$, $\prod_{i=1}^{1} \frac{10i-5}{2i} = \frac{10\cdot 1-5}{2\cdot 1} = \frac{5}{2} > 1\cdot 3^{1-1} = 1$ ✓ ✓

Con $n=2$, $\prod_{i=1}^{2} \frac{10i-5}{2i} = \frac{5}{2}\cdot\frac{10\cdot 2-5}{2\cdot 2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{15}{4} = \frac{75}{8} = 9.375 > 2\cdot 3^{2-1} = 6$ ✓ ✓

Inducción corrida.

Proposición: $P(n)$ $\prod_{i=1}^{n} \frac{10i-5}{2i} > n\,3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Caso base.

Veo si vale el caso $P(3)$.

$\prod_{i=1}^{3} \frac{10i-5}{2i} = \frac{75}{8}\cdot\frac{10\cdot 3-5}{2\cdot 3} = \frac{75}{8}\cdot\frac{25}{6} = 39.0625 > 3\cdot 3^{3-1} = 27$ ✓ ✓

Luego, se cumple $P(3)$.

¿hiciste la cuenta en otra hoja y la pasaste? ¿Cómo supiste que sí o sí tenías que ver el paso $P(3)$?

Paso inductivo.

Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ fijo. Supongo que vale $P(k)$ y quiero probar que se cumple $P(k+1)$. ✓

$P(k)$: $\prod_{i=1}^{k} \frac{10i-5}{2i} > k\,3^{k-1}$ (Hipótesis Inductiva, HI). ✓

$P(k+1)$: $\prod_{i=1}^{k+1} \frac{10i-5}{2i} \overset{?}{>} (k+1)\,3^{(k+1)-1} = (k+1)\,3^{k}$ (lo que quiero demostrar)

$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{10i-5}{2i} = \underbrace{\left\{\prod_{i=1}^{k} \frac{10i-5}{2i}\right\}}_{>k\,3^{k-1}} \cdot \frac{10(k+1)-5}{2(k+1)} \overset{HI}{>} k\cdot 3^{k-1}\cdot\frac{10k+5}{2(k+1)}$

Luego, quiero ver que $k\cdot 3^{k-1}\cdot\frac{10k+5}{2(k+1)} \geq (k+1)\cdot 3^{k}$

$\underset{3^{k-1}>0}{\Leftrightarrow} \frac{10k^2+5k}{2(k+1)} \geq 3(k+1) \underset{\substack{k+1>0\\ \text{pues}\\ k\geq 3}}{\Leftrightarrow} 10k^2+5k \geq 3(k+1)^2\cdot 2$

NOTA

b) Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$ tales que $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} h$.
Quiero probar que $f \mathcal{R} h$.

-) $f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f(n) \leq g(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\}$
-) $g \mathcal{R} h \Leftrightarrow g(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\}$

Luego, $f(n) \leq g(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\}$
Entonces, $f(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\} \Leftrightarrow f \mathcal{R} h$.
Así demostré que $\mathcal{R}$ es transitiva ■

1b) Se define $h \in \mathcal{F}$ como $h(n) = r_3(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(0) = h(3) = h(6) = 0 \\ h(1) = h(4) = h(7) = 1 \\ h(2) = h(5) = h(8) = 2 \end{cases}$$

Busco la cantidad de funciones $f \in \mathcal{F}$ cumplen que
$8 \in \text{Im}(f) \quad \wedge \quad f \mathcal{R} h$
$\Leftrightarrow 8 \in \text{Im}(f) \quad \wedge \quad f(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\}$

Para $n=0$ y $n=3$ tengo que $h(n) = 0$. Entonces, necesito que $f(0) \leq 0$. y $f(3) \leq 0$. Pero como $\min(\text{codom}(f)) = 0$, sé que $f(n) \geq 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, 8\}$. Luego,
$0 \leq f(0) \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq f(3) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = f(3) = 0$.
Como $f(0)$ y $f(3)$ están unívocamente determinados, tengo una única variante para $n=0$ y $n=3$.

Para $n=1$ y $n=4$ tengo que $h(n) = 1$. Entonces, necesito que

NOTA

Ahora analizo congruencia módulo 3.

$81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv -11n^3 - 22n \ (3)$ pues

$81^n \equiv 3^{4n} \equiv 0(3) \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $-45 \equiv -33 \equiv 0(3)$.

Pero como $-11 \equiv 1(3)$ y $-22 \equiv 2(3)$,

$-11n^3 - 22n \equiv n^3 + 2n \ (3)$.

Busco los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^3 + 2n \equiv 0(3)$ con una tabla de restos

$n \equiv$	0	1	2	
$2n \equiv$	0	2	1	(mod 3)
$n^3 \equiv$	0	1	1	
$n^3+2n \equiv$	0	3	0	

Luego, se cumple que $n^3 + 2n \equiv 0(3) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces,
como $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv n^3 + 2n \equiv 0 \ (3) \ \forall n \in \mathbb{N}$, sé
que $3 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, como
$3 \mid 30$, sé que $3 \mid d$. Esto vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Retomando, tengo que

i) $2 \mid d \wedge 3 \mid d \wedge 5 \mid d$ si $n \equiv 1(5)$

ii) $2 \mid d \wedge 3 \mid d \wedge 5 \nmid d$ si $n \not\equiv 1(5)$

En el primer caso, $2 \cdot 3 \cdot 5 \mid d \Leftrightarrow 30 \mid d$. Como $d \mid 30$, sé que $d = 30$. En el segundo caso, $2 \cdot 3 \mid d \Leftrightarrow 6 \mid d$. Como $d \mid 30$ y $5 \nmid d$, sé que $d = 6$. (*) (detrás de la hoja 0).

$$\therefore (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30) = \begin{cases} 30 & \text{si } n \equiv 1(5) \\ 6 & \text{si } n \not\equiv 1(5) \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Notar que $n \not\equiv 1(5) \Leftrightarrow n \equiv 0(5) \vee n \equiv 2(5) \vee n \equiv 3(5) \vee n \equiv 4(5)$.

NOTA

1) Sean $X=\{0,\dots,8\}$, $\mathcal{F}=\{f: X\to X \mid f \text{ es función}\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f\,\mathcal{R}\,g \Leftrightarrow f(n)\leq g(n) \quad \forall n\in\{0,\dots,5\}$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva

b) Sea $h\in\mathcal{F}$ definida como

$$h(n)=f_3(n) \quad \forall n\in\{0,\dots,8\}$$

Calcular $\#\{f\in\mathcal{F} \mid 8\in \operatorname{Im}(f) \wedge f\,\mathcal{R}\,h\}$.

Reflexividad.

$\mathcal{R}$ es reflexiva si y sólo si para cada $f\in\mathcal{F}$ se cumple que $f\,\mathcal{R}\,f$. Voy a demostrar que se cumple.

D/ Sea $f\in\mathcal{F}$. Luego, como $f(n)=f(n)$ $\forall n\in\{0,\dots,5\}$, es "trivial" demostrar que $f(n)\leq f(n)$ $\forall n\in\{0,\dots,5\}$.

Como $f\,\mathcal{R}\,f \Leftrightarrow f(n)\leq f(n)$ $\forall n\in\{0,\dots,5\}$, entonces $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva. ∎ ✓

Simetría.

$\mathcal{R}$ es simétrica si y sólo si para cada $f,g\in\mathcal{F}$ tales que $f\,\mathcal{R}\,g$ se cumple que $g\,\mathcal{R}\,f$. Demuestro que no se cumple siempre mediante un contraejemplo. ✓

D/ Sea $f\in\mathcal{F}$ definida como $f(n)=1$ $\forall n\in\{0,\dots,8\}$ y sea $g\in\mathcal{F}$ definida como $g(n)=2$ $\forall n\in\{0,\dots,8\}$. Luego, ✓

NOTA

Compruebo.

Con $n=1$, $d=(81^1-45-11\cdot1^3-22\cdot1-33\cdot1^2:30)=(-30:30)=30$

Con $n=2$, $d=(81^2-45-11\cdot2^3-22\cdot2-33\cdot2^2:30)=(6318:30)$

Como $30=2\cdot3\cdot5$, $6318=2\cdot3\cdot1053$ y $5\nmid6318$, entonces $d=2\cdot3=6$.

4) Determinar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $n\leq 70000$ $\wedge$ $(n:5184)=1728$ $\wedge$ $\#Div_+(n)=56$.

·) $5184=2^6\cdot3^4=3\cdot1728$

·) $1728=2^6\cdot3^3$

Como $(n:5184)=1728$, sé que $1728\mid n$ y que $1728\cdot3\nmid n$. Luego, por el TFA, tengo que

$n=2^{r_2}\cdot3^{r_3}\cdot5^{r_5}\cdots$ con $r_i\in\mathbb{N}_0$ $\forall i\in\mathbb{N}$ primo.

Luego, como $2^6\cdot3^3\mid n$, sé que

$r_2\geq6$ y $r_3\geq3$

Sin embargo, como $\underbrace{3\cdot\overbrace{2^6\cdot3^3}^{1728}}_{5184}\nmid n$, sé que $r_3<4$

Entonces, $r_3=3$. Luego, también sé que

$\#Div_+(n)=(r_2+1)(r_3+1)(r_5+1)\cdots$

Pero como $r_3=3$ y $\#Div_+(n)=56$ (por el enunciado),

$56=(r_2+1)\overbrace{(3+1)}^{4}(r_5+1)\cdots\Leftrightarrow14=(r_2+1)(r_5+1)(r_7+1)\cdots$

Luego, como $r_2\geq6\Leftrightarrow r_2+1\geq7$, sé que

$(r_2+1)(r_5+1)(r_7+1)\cdots\geq7(r_5+1)(r_7+1)\cdots$

$\Leftrightarrow14\geq7(r_5+1)(r_7+1)\cdots\Leftrightarrow2\geq(r_5+1)(r_7+1)\cdots$

NOTA

$$\begin{cases} f(n) = 1 & \forall n \in \{0,\dots,8\} \\ g(n) = 2 & \forall n \in \{0,\dots,8\} \end{cases} \Rightarrow \underset{1}{f(n)} \leq \underset{2}{g(n)} \quad \forall n \in \{0,\dots,8\}$$

$\Leftrightarrow f \mathcal{R} g$. Sin embargo, $g \mathcal{R} f \Leftrightarrow g(n) \leq f(n)\ \forall n \in \{0,\dots,8\}$, y sé que esto no es cierto pues $2 \leq 1$ es falso. Entonces, encontré un ejemplo donde unas $f,g \in \mathcal{F}$ cumplen que $f \mathcal{R} g$ y que $g \not\mathcal{R} f$. Luego, $\mathcal{R}$ no es simétrica.

Antisimetría

$\mathcal{R}$ es antisimétrica si y sólo si para cada $f,g \in \mathcal{F}$ tales que $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} f$ entonces $f = g$. Demuestro que no se cumple mediante un contraejemplo.

D/ Sean $f \in \mathcal{F}$ definida por $f(n) = 1\ \forall n \in \{0,\dots,8\}$ y $g \in \mathcal{F}$ definida por

$$g(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 8 \\ 1 & \text{si } n \in \{0,\dots,7\} \end{cases}$$

Luego, $f(n) = g(n)\ \forall n \in \{0,\dots,8\}$. Por lo tanto, se cumple que $f(n) \leq g(n)$ y $g(n) \leq f(n)\ \forall n \in \{0,\dots,8\}$. Entonces, $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} f$. Sin embargo, como $f(8) = 1 \neq 2 = g(8)$, $f \neq g$. Así, encontré un ejemplo donde unas $f,g \in \mathcal{F}$ cumplen que $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} f$, pero $f \neq g$. Luego, $\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

Transitividad

$\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si para cada $f,g,h \in \mathcal{F}$ tales que $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} h$ se cumple que $f \mathcal{R} h$. Demuestro que se cumple.

NOTA

$\Rightarrow)$ $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$, que $n \equiv 1 (5)$.

$5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0 (5)$

Como $81^n \equiv 1 (5)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $-45 \equiv 0 (5)$,

$81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0 (5)$

Como $-11 \equiv 4 (5)$, $-22 \equiv 3 (5)$ y $-33 \equiv 2 (5)$,

$1 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 + 4n^3 + 3n + 2n^2 \equiv 0 (5)$

$\Leftrightarrow 4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv -1 \equiv 4 (5)$.

Hago una tabla de restos módulo 5 para buscar los $n \in \mathbb{N}$ tales que $4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv 4 (\text{mod } 5)$.

$n \equiv$	0	$\boxed{1}$	2	3	4	
$3n \equiv$	0	3	1	4	2	
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	(mod 5)
$2n^2 \equiv$	0	2	3	3	2	
$n^3 \equiv$	0	1	3	2	4	
$4n^3 \equiv$	0	4	2	3	1	
$4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv$	0	$\boxed{4}$	1	0	0	

acá estaría el $\Leftarrow$

acá valen todos

$4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv 4 (5) \Leftrightarrow n \equiv 1 (5)$. Entonces,

Luego, $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Rightarrow n \equiv 1 (5)$. ▨

con $n \in \mathbb{N}$ / $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$

Como demostré $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$, entonces vale $\Leftrightarrow$

$5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow n \equiv 1 (5)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\therefore$

La tabla de restos cubre todas las posibilidades, luego equivale a demostrar el $\Leftarrow$

Luego, como $r_i \geq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$ primo, sé que

$r_i + 1 \geq 1 \ \forall i \Rightarrow (r_5+1)(r_7+1)\cdots \geq 1$

Entonces, $(r_5+1)(r_7+1)\cdots \in \{1, 2\}$.

•) $(r_5+1)(r_7+1)\cdots = 1 \Rightarrow r_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ primo.

Luego, $n = 2^{r_2} \cdot 3^3$. También tenía que

$14 = (r_2+1)(r_5+1)(r_7+1)\cdots \Rightarrow 14 = (r_2+1)\cdot 1 \Rightarrow r_2 = 13$

Luego, $n = 2^{13} \cdot 3^3 = 221184 > 30000$.

Pero necesito que $n \leq 30000$, así que descarto este caso

•) $(r_5+1)(r_7+1)\cdots = 2 \Rightarrow \exists!\, i \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ primo / $r_i \neq 0 \wedge r_i = 1$

Esto es porque 2 es primo y todos los factores de $(r_5+1)(r_7+1)\cdots$ deben ser iguales a 1 excluyendo uno, que será igual a 2. Entonces, $\exists!\, i \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ primo / $r_i + 1 \neq 1 \wedge r_i + 1 = 2$

implica mi afirmación anterior.

Voy a llamar p al único i que cumple que $r_i = 1$

Entonces, $n = 2^{r_2} \cdot 3^3 \cdot p^1$ y tenía que

$14 = (r_2+1)(r_5+1)(r_7+1)\cdots \Rightarrow 14 = (r_2+1)\cdot 2 \Rightarrow r_2 = 6$

Luego, $n = 2^6 \cdot 3^3 \cdot p$ con $p \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ primo. Busco los p tales que $n \leq 30000$.

$n \leq 30000 \Leftrightarrow 2^6 \cdot 3^3 \cdot p \leq 30000 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3^3 \cdot p \leq 625$

$\Rightarrow p \leq \left\lfloor \frac{625}{36} \right\rfloor \Rightarrow p \leq 17. \Rightarrow p \in \{5, 7, 11, 13, 17\}$.

La función piso

$\therefore n \in \{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5,\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7,\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 11,\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 13,\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 17\}$ ▨

Perfecto

NOTA

$0 \leq f(1), f(4) \leq 1 \iff f(1), f(4) \in \{0,1\}$ ✓

Luego, $n=1$ y $n=4$ me dan dos variantes cada uno.

Para $n=2$ y $n=5$ tengo que $h(n)=2$. Entonces, pido que $0 \leq f(2), f(5) \leq 2 \iff f(2), f(5) \in \{0,1,2\}$ ✓

Luego, $n=2$ y $n=5$ me dan tres variantes cada uno.

Considero los casos $n \in \{6,7,8\}$. Como necesito que $8 \in Im(f)$, y $f(n) \neq 8 \ \forall n \in \{0,\dots,5\}$, sé que al menos un $n \in \{6,7,8\}$ cumple que $f(n)=8$ ✓ Resuelvo "por complemento".

"Universo": $f(n) \in \{0,\dots,8\}$ con $n \in \{6,7,8\}$ tiene 9 variantes por caso. Es decir, 9^3 posibilidades totales ✓

"Complemento": $f(n) \in \{0,\dots,7\}$ con $n \in \{6,7,8\}$. O sea, en vez de pedir que alguno cumpla que $f(n)=8$, pido que no lo cumpla ninguno. Existen 8 variantes por caso, lo que me da 8^3 posibilidades. Se las resto a las del "universo" ✓

Entonces, los casos en los que $\exists n \in \{6,7,8\} / f(n)=8$ son 9^3-8^3 ✓ Ahora calculo las variantes totales

Total: $\underbrace{1}_{n=0} \cdot \underbrace{2}_{n=1} \cdot \underbrace{3}_{n=2} \cdot \underbrace{1}_{n=3} \cdot \underbrace{2}_{n=4} \cdot \underbrace{3}_{n=5} \cdot \underbrace{(9^3-8^3)}_{n \in \{6,7,8\}} = 7812$ ✓

$\therefore \# \{f \in \mathcal{F} / 8 \in Im(f) \wedge f \mathcal{R} h\} = 7812$ ∎

Observación: las posibilidades se multiplican porque cada caso no es mutuamente excluyente con respecto del otro. ✓

Perfecto

3) b) Calcular $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Defino $d = (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30)$. Por la definición del MCD, sé que $d \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ y que $d \mid 30$. Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, verifico la divisibilidad de $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ por 2, 3 y por 5.

En primer lugar, por el ejercicio anterior, sé que

$$5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow n \equiv 1 (5).$$

Entonces, como $5 \mid 30$ y $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ con $n \equiv 1 (5)$, entonces $5 \mid d$ si: $n \equiv 1 (5)$.

Ahora analizo congruencia módulo 2.

-) $81 \equiv 1 (2) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1 (2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

-) $-45 \equiv 1 (2)$, $-11 \equiv 1 (2)$, $-22 \equiv 0 (2)$, $-33 \equiv 1 (2)$.

Luego, $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 + 1 + n^3 + 0 \cdot n + n^2 (2)$.

Como $1 + 1 \equiv 2 \equiv 0 (2)$ y $0 \cdot n \equiv 0 (2)$, tengo que $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv n^3 + n^2 (2)$. Ya sé que esto vale para cualquier $n \in \mathbb{N}$ pues, si n es par, es "trivial" y, si n es impar, entonces n^3 y n^2 serán impares, y su suma será par. Por las dudas, compruebo con una tabla de restos.

$n \equiv$	0	1	(mód 2)
$n^2 \equiv$	0	1	
$n^3 \equiv$	0	1	
$n^3 + n^2 \equiv$	0	0	

Luego, $2 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $2 \mid 30$, entonces $2 \mid d$. Esto vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow 10k^2+5k \geq 6k^2+12k+6 \Leftrightarrow 4k^2-7k-6 \geq 0.$

Con $k=3$, $4k^2-7k-6 = 9 \geq 0$. Además, como $4k^2-7k-6$ es un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ cuyo coeficiente principal es positivo $(4>0)$, sé que es estrictamente creciente. Entonces, $\boxed{4k^3-7k-6 \geq 0 \quad \forall\, k \geq 3}$ ✓

↳ después de su x_v. Antes es estric decrec.

verdad pero no por lo que pusiste.

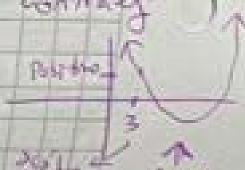
Lo que tienes que hacer es buscar las raíces y/o ver que estaban en la parte crec y positiva usando dos valores.

Luego, se cumple que con un $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ fijo,

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

Entonces, como valen el caso base y el paso inductivo, vale la proposición $P(n)$ por inducción corrida.

Contraej



Coef ppal positivo

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{10i-5}{2i} > n \cdot 3^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}.$$ ✓

Pero como vale también con $n=1$ y con $n=2$, entonces vale $\forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 3} \cup \{1,2\} = \mathbb{N}$ ✓

$$\therefore \prod_{i=1}^{n} \frac{10i-5}{2i} > n 3^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \blacksquare$$ ✓

3) Sea $n \in \mathbb{N}$.

a) Probar que $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow n \equiv 1\ (5)$

$(\Leftarrow)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \equiv 1\ (5)$. Quiero ver que

$5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0\ (5)$.

Como $81 \equiv 1\ (5) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1\ (5) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como $n \equiv 1\ (5) \Rightarrow n^3 \equiv 1^3\ (5)$ y $n^2 \equiv 1^2\ (5)$

Luego, $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 - 45 - 11 \cdot 1^3 - 22 \cdot 1 - 33 \cdot 1^2$

$\equiv -110 \equiv 0\ (5)$. Entonces, probé que con un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \equiv 1\ (5)$, entonces $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$.

(*) Del primer caso, tengo que $30 | d$ y $d | 30$. Entonces,

$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} / 30 \cdot k_1 = d \wedge d \cdot k_2 = 30$

$\Rightarrow 30 \cdot k_1 \cdot k_2 = 30 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 1.$

Pero $\exists! (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 / k_1 \cdot k_2 = 1$ y sé que $k_1 = k_2 = 1$.

Luego, $d = 1 \cdot 30 = 30$. ✓

Del segundo caso, tengo que $6 | d \wedge 5 \nmid d \wedge d | 30$. Luego,

$\exists k_1 \in \mathbb{N} \setminus \{5\} / 6k_1 = d$ y $\exists k_2 \in \mathbb{N} / dk_2 = 30$

$\Rightarrow 6k_1k_2 = 30 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 5.$

Como $k_1 \neq 5$ y 5 es primo, $k_1 = 1$ y $k_2 = 5$.

Luego, $d = 6 \cdot 1 = 6$ ✓