Algebra I
Examen Final (15-11-22)

Nombre y apellido

Libreta: **Carrera:** Ciencias de la Computación

1	2	3	4	N
X	B-	R	R+	6 (seis)

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Calcule la cantidad de relaciones de equivalencia $\mathcal{R}$ de A que satisfacen

$$\{(1,1),(1,3),(3,2),(4,5),(7,6),(8,9)\} \subseteq \mathcal{R} \quad \text{y} \quad (1,10) \notin \mathcal{R}.$$

$7^{n-1} + 5^{n+2} : 5.7^n - 5^{n+1}$

2. Pruebe que $d = (\cancel{7n-1+5n+2 : 5.7n-5n+1})$ divide a 176 para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe además que si n es par entonces $d \in \{8, 16, 88, 176\}$ y que si n es impar entonces $d \in \{2, 22\}$.

3. Pruebe que si $w \in \mathbb{C}$ satisface $w^{13} = 1$, entonces $(w^{39} + w^{20})(w^{32} - 1)$ es imaginario puro.

4. Encuentre todos los valores de a para los que el polinomio

$$X^3 - 2aX^2 - a^2X + 2a \in \mathbb{C}[X]$$

tiene dos raíces cuya suma es 3 y cuyo producto es 2.

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

Hoja 1

4) $x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a = f(x)$

sean b, c dos raíces de $f(x)$.

Por dato de enunciado sé que

$$\begin{cases} b + c = 3 & ① \\ bc = 2 & ② \end{cases}$$

de ① tengo que

$b = 3 - c$

reemplazo en ②.

$(3-c).c = 2$

$-c^2 + 3c - 2 = 0 \iff \frac{-3 \pm w^2}{2.-1}$ con $w^2 = 3^2 - 4.-1.-2 = 1$

entonces, las dos posibles soluc. son:

$c_1 = 1$
$c_2 = 2$

para $c = 1$, $b = 2$
para $c = 2$, $b = \cancel{4}\ 1$

Por lo tanto, $f(x)$ debe tener tanto a 1 como a 2 como posibles raíces: para cumplir la condición de la suma y producto dado en el enunciado.

$f(1) = 1^3 - \cancel{2.a.1^2} - a^2.1 + \cancel{2a} = -a^2 + 1$

$f(2) = 2^3 - 2a.2^2 - a^2.2 + 2\cancel{2}a = \cancel{12 - 8a - 2a^2}$ $8 - \cancel{6}8a - 2a^2$ $a = 1$, $a = -2$

Teniendo ambas ecuaciones, veo para qué valores de a verifican ser 0.

~~[illegible]~~

$$\begin{cases} -a^2 + 1 = 0 \iff a = \pm 1 & \frac{\pm w^2}{-2} \text{ con } w^2 = -4.-1.1 = 4 \\ 12 - 8a - 2a^2 = 0 \iff a = -2 \mp \sqrt{10} & \frac{8 \pm w^2}{2.-2} \text{ con } w^2 = (-8)^2 - 4.-2.12 \end{cases}$$

con estos valores obtenidos, voy a armar? los polinomios para cada a, y voy a evaluar la otra raíz, de modo de obtener para qué valor(es) ambos valores 1 y 2 son raíces del polinomio observo cuando 1 es raíz, obtengo que

$-a^2+1=0$ tiene solución únicamente para $a=1,-1$

con $a=1$ el polinomio puedo escribo como:

$$x^3-2x^2-x+2=t(x)$$

observo que al evaluarlo en 2 el resultado es:

$t(2)$: $2^3-2\cdot2^2-2+2=0$ ✓ por lo que para $a=1$ tanto 1 como 2 son raíces.

con $a=-1$ el polinomio queda escrito como:

$$x^3+2x^2-x-2=m(x)$$

pero al evaluarlo en 2:

$m(2)$: $2^3+2\cdot2^2-2+2=16\neq0$ por lo que $a=-1$ no es válido, ya que 2 no es raíz.

Ahora veo el caso en el que 2 es raíz, como posibles candidatos tengo a:

$a=-2\pm\sqrt{10}$

para $a=(-2+\sqrt{10})$ el polinomio queda escrito como:

$$x^3+(4-2\sqrt{10})x^2-(14-4\sqrt{10})x+2\cdot(-2+\sqrt{10})=g(x)$$

Al evaluarlo en 1, obtengo que: $g(1)=-13+4\sqrt{10}$, por lo que el valor no me sirve, dado que 1 no es raíz

para $a=-2-\sqrt{10}$, el polinomio queda escrito como:

$$x^3-(-4-2\sqrt{10})x^2-(14+4\sqrt{10})x+2\cdot(-2-\sqrt{10})=h(x)$$

Al evaluarlo en 1, obtengo que $h(1)=-13-4\sqrt{10}$, por lo que el valor no sirve, dado que 1 no es raíz.

Habiendo estudiado los 4 casos posibles para que se cumpla $ab=2$, $a+b=3$, concluyo que el único valor que hace esto posible es $a=1$.

NOTA

Hoja 2

2) $d = \left(7^{(n-1)} + 5^{(n+2)} : 5 . 7^{n} - 5^{(n+1)}\right)$

Al ser d el MCD, sé que:

$$\begin{cases} d \mid 7^{n-1} + 5^{n+2} \\ d \mid 5 . 7^{n} - 5^{n+1} \end{cases}$$

y además, a ~~todas~~ las combinaciones lineales entre ambos términos

$$\cancel{\Rightarrow d \mid 6.(7^{n-1} + 5^{n+2}) - 5.7^{n} + 5^{n+1} =}$$

$$\Rightarrow d \mid 5 . 7 . (7^{n-1} + 5^{n+2}) - 5 . 7^{n} + 5^{n+1} = 5 . 7^{n} + 7 . 5^{n+3} \cancel{- 5 . 7^{n}} + 5^{n+1}$$

$$d \mid 175^{n+1} + 5^{n+1} = 176 . 5^{n+1}$$

por otro lado,

$$\cancel{d \mid 5 . 7 (5 . 7^{n} - 5^{n+1}) + \dots \; 7^{n-1} + 5^{n+2} = 25 . 7^{n} - 5^{n+2} + 7^{n-1} + 5^{n+2}}$$

$$d \mid 7 . 5 . (5 . 7^{n} - 5^{n+1}) + 7 . (7^{n-1} + 5^{n+2}) = 175 . 7^{n} - 7 . 5^{n+2} + 7^{n} + 7 . 5^{n+2}$$
$$= 176 . 7^{n}.$$

Hasta ahora sé que

$$\begin{cases} d \mid 176 . 5^{n+1} \\ d \mid 176 . 7^{n} \end{cases}$$

pero si divide a ambos, también dividirá a su MCD.

$$d \mid (176 . 5^{n+1} : 176 . 7^{n}) = 176 \, (5^{n+1} : 7^{n})$$

observo que $(5^{n+1} : 7^{n}) = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, dado que son ambos primos no iguales

por lo tanto, $d \mid 176$. ✓

NOTA

n par, $n = 2k$ $k \in \mathbb{N}$

$176 = 2^4 \cdot 11$.

~~observo~~ Congr. mod 2.

$7^{n-1} + 5^{n+2} \equiv ? \ (2)$

$\Rightarrow 1^{n-1} + 1^{n+2} \equiv ? \ (2)$

$1 + 1 \equiv 0 \ (2)$ ✓

observo que $1^{n-1} \equiv 1 \ (2) \ \forall n \in \mathbb{N}$, pues para $n=1$ $1^{1-1} = 1^0 = 1$, y para todo número mayor a 1 tengo que $n-1 > 0$, valores para los cuales $1^n \equiv 1 (2)$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$ $2 \mid 7^{n-1} + 5^{n+2}$

$5 \cdot 7^n - 5^{n+1} \equiv 1 \cdot 1^n - 1^{n+1} \equiv 2 \equiv 0 \ (2)$ Por lo tanto, el 2 siempre será factor de d $\forall n \in \mathbb{N}$ ✓

~~Congr mod 11.~~

~~$7^{n-1} + 5^n \cdot 25 \equiv ? \ (11)$~~

~~Al ser 11 primo, y 11 ∤ 7, puedo aplicar PTF para decir que $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$~~

~~$7^{n-1} + 5^n \cdot 25 \equiv 7^{n-1} + 5^n \ (11)$~~

observo mod 8 con n par. , si n es par $\Rightarrow n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$5 \cdot 7^n - 5^{n+1} \equiv 5((-1)^2)^k - (5^2)^k \cdot 5 \equiv 5 \cdot 1^k - 25^k \cdot 5 \equiv 5 - 5 \equiv 0 \ (8)$ ✓

$7^{n-1} + 5^{n+2} \equiv (-1)^{n-1} + 5^n \ (8)$

$\equiv (-1)^{2k-1} + 5^{2k} \ (8)$

$\equiv -1 + 25^k \ (8)$

$\equiv -1 + 1 \equiv 0 \ (8)$

observo que $2k-1$ es impar y ≥ 1 $\forall n \in \mathbb{N}$ dado que para $n=1$ $2k-1 = 1$, y al restar 1 a un nro par siempre se obtiene un impar.

como 8 divide a ambos términos, entonces pertenece a la factor. en primos del MCD.

De acá en más, lo único que hay que ver es que si n es impar $\therefore 4 \nmid d$.

[redacted] Hoja 3

Congr mod 11, n par.

a) $7^{n-1}+5^{n+2} \equiv ?\ (11)$ n par, $n=2k$ $k \in \mathbb{N}$

$7^{2k-1}+5^{2k+2} \equiv ?\ (11)$ busco el inverso de 7 (7^{-1}) con la ec. de congruencia:

$5^{k}.8+3^{k}.3 \equiv ?\ (11)$

$7x \equiv 1\ (11) \overset{3\perp 11}{\Longleftrightarrow} x \equiv 3\ (11)$

$\Longleftrightarrow \boxed{1x \equiv 8\ (11)}$

Por PTF, como 11 es primo y $11 \nmid 5$, $11 \nmid 3$,

puedo usar que $5^{k} \equiv 5^{r_{10}(k)}\ (11)$

$3^{k} \equiv 3^{r_{10}(k)}\ (11)$

observo que para $k \equiv 5\ (10)$,

$5^{5}.8+3^{5}.3 \equiv 25729\ (10)$

$\equiv \cancel{3}\ 0\ (11)$ $\Rightarrow n = 2.5 = 10$

c) $5.7^{n}-5^{n+1} \equiv ?\ (11)$ n par, $n=2k$ $k \in \mathbb{N}$

$5.7^{2k}-5^{2k+1} \equiv ?\ (11)$ uso PTF con la justificación anterior.

$5.5^{k}-5.3^{k} \equiv ?\ (11)$

$5.5^{r_{10}(k)}-5.3^{r_{10}(k)} \equiv ?\ (11)$ para $k \equiv 5\ (10)$ tengo que

$5.5^{5}-5.3^{5} \equiv 14410\ (11)$

$\equiv 0\ (11)$ Luego, como 11 divide ambos términos concluyo que para $k \equiv 5\ (10)$, $n=2k$ 11 forma parte ~~del~~ MCD. de la fact. ~~[illegible]~~

no hace falta.

Tengo que ver finalmente que pasa para 2^4, n par $= 2k$

$\Rightarrow \quad 7^{n-1} + 5^{n+2} \equiv ?\ (16)$

$\Leftrightarrow (7^2)^{k-1}\cdot 7^1 + 5^{2k}\cdot 25 \equiv ?\ (16)$

$\Leftrightarrow 1^k \cdot 7 + 9^k \cdot 9 \equiv ?\ (16)$

$\Leftrightarrow \quad 7 + 9^k \cdot 9 \equiv ?\ (16)$

busco 7^{-1} con ec. de congr.

$7x \equiv 1\ (16) \xrightarrow{7 \perp 16} x \equiv 7\ (16)$

observo que para $k = 2$ tengo que

$7 + 9^2 \cdot 9 = 736 \equiv 0\ (16)$

~~Por lo que concluyo que si k = 2, 16~~

$5 \cdot 7^n - 5^{n+1} \equiv ?\ (16)$

$5(7^2)^k - (5^2)^k \cdot 5 \equiv ?\ (16)$

$\Leftrightarrow 5 - 9^k \cdot 5 \equiv ?\ (16)$ para $k = 2$ tengo que:

$5 - 9^2 \cdot 5 = -400 \equiv 0\ (16)$

Por lo que concluyo que para $k = 2$, $n = 2k$ 16 divide ambos térm. del MCD y por lo tanto será parte de la factorización del MCD

Me queda probar que con n impar 11 puede pertenecer al MCD.

Si n impar $\Rightarrow n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$

$7^{n-1} + 5^{n+2} \equiv ?\ (11)$

$\Leftrightarrow 7^{n-1} + 5^{n} \cdot 5^{3} \equiv ?\ (11)$

~~$\Leftrightarrow (7^2)^k + (5^2)^k \cdot 28 \equiv ?\ (11)$~~

~~$\Leftrightarrow 5^k + 3^k \cdot 3 \equiv ?\ (11)$~~

~~Como 11 es primo y 11 ∤ 5 y 11 ∤ 3 por pff. tengo que~~

~~$5^{\varphi(n)} \equiv 1$ (11)~~

~~$7^{\varphi(n)} \equiv 1$ (11)~~

Hoja 4.

$7^{n-1}+5^{n+2} \equiv ?\ (11)$

n impar. $7^{2k}+5^{2k}.25 \equiv ?\ (11)$

$\Rightarrow 5^{k}+3^{k}.3 \equiv ?\ (11)$ observo que para $k=15$ la ecuación se hace congruente a 0.

b) $5.7^{n}-5^{n+1} \equiv ?\ (11)$

n impar $5.7^{2k}.7-5^{2k}.25 \equiv ?\ (11)$

$2.5^{k}-3^{k}.3 \equiv ?\ (11)$ para $k=15$ la ec. se hace congr. a 0

Por lo tanto, concluyo que con n impar $=2k+1$, $k=15$ ambos términos del MCD son divididos por 11, por lo que el MCD contendrá al 11 como factor.

Habiendo exhibido ejemplos para todas las posibilidades del mcd, quedó probado que

$d \in \{2, 22\}$ si n impar $(2k+1=n)$

$d \in \{8, 16, 88, 176\}$ si n es par.

los n impares ya fueron probados, pues 2 siempre divide, y para el ejemplo del 11 hay un k que da como resultado del MCD 22.

n pares

para $n=10$

$(7^{9}+5^{n+2} : 5.7^{n}-5^{n+1}) = 88$ ✓

para $n=14$

$(7^{13}+5^{16} : 5.7^{14}-5^{15}) = 176$ ✓

para $n=4$

$(7^{3}+5^{6} : 5.7^{4}-5^{5}) = 16$ ✓

$n=2$

$(7+5^{4} : 5.7^{2}-5^{3}) = 8$ ✓

NOTA

$w^{13} = 1$ x enunc.

3) $w^{13} = 1 \Rightarrow w \in G_{13}$.

$$(w^{39} + w^{20})(w^{32} - 1) = ((w^{13})^3 + w^{13} \cdot w^7)((w^{13})^2 \cdot w^6 - 1) = (1 + w^7) \cdot (w^6 - 1)$$

$w^{13} = 1$

$$= w^{13} - w^7 + w^6 - 1 = -(w^7) + w^6$$

...go que probar que:

$w = e^{\frac{2k\pi}{13} \cdot i}$ con $0 \leq k \leq 13$

(por estar mult. por -1)

$$e^{\left(\frac{2k\pi}{13} \cdot i + \pi\right) \cdot 7} + e^{\frac{2k\pi}{13} \cdot i \cdot 6}$$

quiero que la suma parte real de ambos nros sea 0, es decir:

$$\cos\left(\frac{(2k\pi + 13\pi) \cdot 7}{13}\right) + \cos\left(\frac{2k\pi \cdot 6}{13}\right) = 0$$

$$\overbrace{\cos\left(\frac{14k\pi + 13\pi}{13}\right)}^{C_1} + \overbrace{\cos\left(\frac{12k\pi}{13}\right)}^{C_2} = 0$$

0,97

observo que esto pasa si la diferencia de los argumentos luego de restar $2k\pi$ a c/u para "eliminar" las vueltas de más es de π, pues de esta forma son los "opuestos" y se cancelan entre sí.

para $k=0$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓ (valores quitando las "vueltas de más")

$k=1$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=2$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=3$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=4$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=5$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=6$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=7$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=8$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=9$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=10$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=11$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

$k=12$ $C_1 = \pi$ $C_2 = 0$ ✓

El motivo es que $-w^7 + w^6$, $-w^7 + \overline{w^7} \in \mathrm{Im}$.